9-дәріс. Ауыспалы таңбалы қатарлар. Лейбниц белгісі.
10-дәріс. Мүшелерінің таңбалары әр түрлі қатарлар.

Дәріс жоспары:

1. Ауыспалы таңбалы қатарлар ұғымы және олардың негізгі қасиеттері.
2. Лейбниц белгісі, оның тұжырымдалуы және дәлелдемесі.
3. Мүшелерінің таңбалары әр түрлі сандық қатарлар және олардың жинақтылығын зерттеу.
4. Абсолют және шартты жинақтылық ұғымдары, олардың арасындағы байланыс.

1.Ауыспалы таңбалы қатарлар. Осыған дейін, мүшелері теріс емес сандық қатарларды қарастырдық. Мүшелері оң емес қатарлардың оң таңбалы қатарлардан айырмасы тек мүшелерін

-1-ге көбейту ғана болады. Сондықтан, олардың жинақтылығын қарастыру жоғарыда қарастырылғанға ұқсас. Қатардың мүшелерінің таңбалары алма кезек ауысып отырса, біресе оң, біресе теріс болып келетін қатарлар ауыспалы таңбалы қатарлар деп аталады. Ыңғайлы болуы үшін қатардың бірінші мүшесін оң деп алайық. Сонда ауыспалы таңбалы қатар жалпы түрде былай жазылады:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots \quad (\text{мұнда } a_n > 0) \quad (3.1)$$

Ауыспалы таңбалы қатардың жинақты болуының мынадай жеткілікті шартын келтірейік:

Лейбниц белгісі. Егер ауыспалы таңбалы (3.1) қатардың мүшелерінің абсолют шамалары монотонды кемімелі, яғни тізбек құраса: $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$ және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда мұндай қатар жинақты болады.

Дәлелдеу: Айталық (3.1) қатары берілсін. Сонымен бірге $a_n > a_{n+1}$ және $n \to \infty$-да $a_n \to 0$ болсын.

Мүшелерінің саны жұп болатын дербес қосындыларды қарастырайық:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots +$$

$$+ (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Жақшадағы айырымдардың барлығы да теореманың шартына сәйкес нөлден үлкен. Сондықтан, дербес қосындылардың тізбегі $\{S_{2n}\}$ үдемелі

тізбек. Сонымен, ол тізбек шектелген. Осыны дәлелдейік. Ол үшін S_{2n}-ді былайша жазайық:

$$S_{2n} = a_1 - \left[(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\right].$$

Бұдан, квадрат жақша ішіндегі қосынды оң сан және S_{2n}-де оң сан болғандықтан, кез келген n үшін $S_{2n} < a_1$, яғни $\{S_{2n}\}$ тізбегі шектелген болады. Демек, $\{S_{2n}\}$ үдемелі және шектелген тізбек болғандықтан, оның шегі бар болады: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S.$

Енді қатар мүшелерінің саны тақ болғанда да, дербес қосындылар тізбегінің шегі бар және ол шек S-ке тең болатынын дәлелдейік. Шынында, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ теңдігінен $n \to \infty -$да шекке көшсек және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ шартын ескерсек:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Сонымен, (3.1) қатарының дербес қосындылары тізбегі жинақты және ол S-ке тең. Олай болса, (3.1) қатары жинақты болады.

1-мысал. $\dfrac{1}{1\cdot 2^2} - \dfrac{1}{2\cdot 3^2} + \dfrac{1}{3\cdot 4^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(n+1)^2} - \cdots$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Бұл қатар үшін Лейбниц белгісінің екі шартын тексереміз:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2^3} > \dfrac{1}{2\cdot 3^2} > \dfrac{1}{3\cdot 4^2} > \cdots > \dfrac{1}{n(n+1)^2} > \cdots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2} = 0.$

Екі шарт та орындалады, ендеше қатар жинақты екен.

2.Мүшелерінің таңбалары әр түрлі қатарлар. Біз осыған дейін мүшелері оң қатар мен ауыспалы таңбалы қатарларды қарастырдық. Ал енді бұлардан өзгеше түрдегі, яғни құрамында ақырсыз көп оң және ақырсыз көп теріс таңбалы мүшелері бар және олар кез келген түрде орналасқан қатарларды қарастырамыз. Ондай қатарлар жалпы алғанда мына түрде жазылады

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (3.2)$$

Мұндағы сандардың таңбалары оң не теріс және таңбаларының орналасуы әртүрлі болуы мүмкін. Бұл қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан түзілген қатарды қарастырайық:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| . \qquad (3.3)$$

Айнымалы таңбалы қатарлар үшін мынадай жинақтылық белгісі орын алады.

Теорема. Егер (3.2) қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған (3.3) қатар жинақты болса, онда (3.2) қатар да жинақты болады.

Егер (3.3) қатары жинақты болса, онда (3.2) қатары да жинақты болады.

Дәлелдеу. Айталық (3.3) қатары жинақталатын болсын. (3.2) қатарының дербес S_n , ал (3.3) дербес қосындысын σ_n деп белгілейік:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n ; \quad \sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| .$$

(3.3) қатары жинақты болғандықтан, оның дербес қосындыларының тізбегі $\{\sigma_n\}$ жинақты, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ шегі бар болады. Сонымен бірге, кез келген n үшін $\sigma_n < \sigma$ теңсіздігі орындалады. Өйткені, (3.3) қатары оң таңбалы. S_n дербес қосындысындағы оң мүшелерінің қосындысын $S_n^{'}$ деп, ал теріс таңбалы мүшелері қосындысының асболют шамасын $S_n^{''}$ деп белгілейік. Сонда

$$S_n = S_n^{'} - S_n^{''} \quad (3.4) \quad \text{және} \quad \sigma_n = S_n^{'} + S_n^{''} \qquad (3.5)$$

Ал $\{S_n^{'}\}$ және $\{S_n^{''}\}$ тізбектері кемімейді, ал (3.5) теңдігі мен $\sigma_n < \sigma$ теңсіздігінен олардың шектелгендігі шығады: $S_n^{'} \le \sigma_n \le \sigma$ және $S_n^{''} \le \sigma_n \le \sigma.$ Сондықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{''} = S^{''}$ бар болады. Бұл жағдайда, (3.4) теңдігіне сәйкес (3.2) қатары дербес қосындыларының тізбегінің шегі бар болады:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{'} - S_n^{''}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{'} - \lim_{n\to\infty} S_n^{''} = S^{'} - S^{''} .$$

Бұдан (3.2) қатарының жинақты болатыны шығады.

1-мысал. $-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$ қатары жинақты. Өйткені, бұл қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ қатары жинақты. Бұл қатар жалпылама гармониялық қатардан алынады ($a_1=0$ және $p=2$ болғанда).

Дәлелденген теорема айнымалы таңбалы қатардың жинақталуының тек жеткілікті шарты болып табылады, қажетті емес.Өйткені, айнымалы таңбалы қатарлардың арасында өзі жинақты, ал мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатар жинақсыз болатын қатарлар да бар болады. Мысалы, $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ қатары Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал оның мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатары жинақсыз (гармониялық қатар) болады. Сондықтан, барлық жинақты қатарларды абсолютті және шартты жинақты қатарларға бөлуге болады. Осыған байланысты мына анықтамалар енгізіледі.

Анықтама. Егер $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ айнымалы таңбалы қатары мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатар $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$ жинақты болса, онда берілген қатарды **абсолютті жинақты** қатар деп атайды.

Анықтама. Егер $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ айнымалы таңбалы қатар жинақты, ал оның мүшелерінің абсолют шамаларынын құрылған $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$ қатары жинақсыз болса, онда берілген қатарды **шартты жинақты** деп атайды.

Ескерту. Егер айнымалы таңбалы қатардың өзі жинақталмаса, онда басқа жинақталу туралы сөз қозғауға болмайды.

Бақылау сұрақтары:

1. Ауыспалы таңбалы қатар дегеніміз не және оның жалпы түрі қалай жазылады?
2. Лейбниц белгісі қалай тұжырымдалады және оны қолдану үшін қандай шарттар орындалуы қажет?

3. Лейбниц белгісі бойынша ауыспалы таңбалы қатардың жинақтылығы қалай анықталады?
4. Мүшелерінің таңбалары әр түрлі қатарлар дегеніміз не және олардың жинақтылығы қалай зерттеледі?
5. Абсолют және шартты жинақты қатарлар дегеніміз не? Олардың негізгі айырмашылықтары қандай?