7-дәріс. Коши белгісі.
8-дәріс. Кошидың интегралдық белгісі.

Дәріс жоспары:

1. Оң мүшелі сандық қатарлардың жинақтылығын зерттеу белгілері.
2. Кошидің радикалдық белгісі, оның тұжырымдалуы және дәлелдемесі.
3. Кошидың интегралдық белгісі, оның тұжырымдалуы және қолданылу шарттары.
4. Коши белгілерін пайдаланып сандық қатарлардың жинақтылығы мен жинақсыздығын зерттеу.

Коши белгісі. Егер оң таңбалы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары үшін $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ шегі бар болса, онда қатар $\ell < 1$ болғанда жинақты, ал $\ell > 1$ болғанда жинақсыз болады.

Дәлелдеуі: а) Айталық $\ell < 1$ болсын. $\ell < q < 1$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын, кез келген q санын алайық. Сонда $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < q$ болғандықтан, $n = k$ нөмірден бастап $\sqrt[k]{a_n} < q$ немесе $a_k < q^k \left(n \geq k\right)$ теңсіздігі орындалады. Бұдан

$a_k < q^k, a_{k+1} < q^{k+1}, a_{k+2} < q^{k+2}, \cdots$ болатыны оңай көрінеді. Ал $0 < q < 1$ болғандықтан, $q + q^2 + q^3 + \ldots + q^k + q^{k+1} + q^{k+2} + \ldots$ геометриялық қатары жинақты болады. Соңғы қатардың мүшелері берілген $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының сәйкес мүшелерінен кем болмайды. Сондықтан, ол қатар жинақты.

ә) Айталық $\ell > 1$ болсын. Сонда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell > 1.$ Демек, белгілі бір $n = k$ нөмірден бастап $\sqrt[k]{a_k} > 1$ теңсіздігі орындалады. Бұдан $a_k > 1\left(n \geq k\right).$ Сондықтан, қатардың n-мүшесі $n \to \infty$-да нөлге ұмтылмайды. Олай болса, қатар жинақсыз болады. Белгі дәлелденді.

1-ескертеу. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ болса, берілген қатар жинақсыз болады.

2-ескерту. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ шегі болмаған немесе бірге тең болған жағдайларда Коши белгісі зерттеп отырған қатардың жинақты, не жинақсыз болатынына жауап бере алмайды.

1 - **мысал.** Коши белгісін пайдаланып, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі: Берілген қатар үшін

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

демек, қатар жинақты.

Жоғарыда қатардың жинақты болуын зерттеуде Даламбер мен Коши белгілері барлық кезде тиімді бола бермейтінін көрдік. Бұл белгілер қатар жинақтылығын анықтауда жарамсыз жағдайда қолданылатын басқа бір белгіні келтірейік. Бұл белгі берілген қатарды аргументтің бүтін сан мәндері қатардың мүшелеріне тең болатын f(x) функциясынан алынған 1-текті меншіксіз интегралмен салыстыруға негізделген.

Кошидың интегралдық белгісі. Айталық

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)+\cdots\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$ яғни мүшелері $(1;+\infty)$ аралығында үздіксіз, оң және кемімелі кейбір $f(x)$ функциясының мәндері болатын қатары берілсін. Сонда

а) егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ қатары да жинақты болады,

ә) егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ қатары да жинақсыз болады.

Дәлелдеу. Жоғары жағынан $y = f(x)$ функциясы графигімен, бүйір жақтары $x = 1, x = n$ түзулерімен, ал төменгі жағы O_x осімен шектелген қисық сызықты трапецияны қарастырайық. Бұл трапецияға табандары $[1;2]$,$[2;3]$ $\cdots$,$[n-1;n]$ ал биіктіктері $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n-1), f(n)$ болатын тік төртбұрыштарды іштей және сырттай салсақ. басқышты екі фигура аламыз. Сонда анықталған интегралдың геометриялық мағынасын еске алсақ

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(n)<\int_1^n f(x)dx<f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)$$

теңсіздіктерін аламыз, немесе

$S_n-f(1)<\int_1^n f(x)dx<S_n-f(n)$ болады.

Бұдан $S_n<f(1)+\int_1^n f(x)dx$, (2.10) $S_n>f(n)+\int_1^n f(x)dx$, (2.11)

болатыны оңай көрінеді. Мұндағы S_n-қарастырып отырған қатардың n дербес қосындысы. Енді төмендегідей жағдайларды қарастырайық.

а) Айталық $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақты (бар) болсын. Сонда $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=J$ шегі де бар болады. Ал $f(x)>0$ болғандықтан, $\int_1^n f(x)dx$ тізбегі n нөмірі артқанда өседі және ол жоғарыдан шектелген:

$$\int_1^n f(x)dx<\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=J.$$

(2.10) шексіздігінен $S_n<f(1)+J$, яғни қатардың дербес қосындыларының $\{S_n\}$ тізбегі шектелген болады. Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ шегі бар, яғни берілген қатар жинақты.

ә) Айталық $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ меншікті интегралы жинақсыз (бар болмасын) болсын. Бұл жағдайда, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=+\infty$. Өйткені, тізбек-біркелкі үдемелі шектелмеген тізбек. (2.11) теңсіздігінен қатардың дербес қосындылар тізбегі $\{S_n\}$ шектелмегендігі шығады, сондықтан қатар жинақсыз болады.

Интегралдық белгіні қолданып, есептер шығарайық. Жоғарыда, жалпылама гармоникалық қатарды қарастырғанбыз:

$$\frac{1}{1^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots \qquad (2.12)$$

Бұл қатардың $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $0<\alpha\le 1$ болғанда жинақсыз болатынын дәлелдеусіз келтіргенбіз. Осы айтылғанды интегралдық белгі жәрдемімен дәлелдейік. Қатардың мүшелері оң, біркелкі кемімелі $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ функциясының $x=1,2,3,\cdots,n,\cdots$ нүктелердегі мәндеріне тең. Енді $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ меншіксіз интегралын қарастырайық. Сонда

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}}-\frac{1}{1-\alpha}$$

1) $\alpha-1>0$ болсын, онда ақырсыздық бөлшектің бөлімінде болады, онда бөлшектің шегі нольге тең. Бұдан, қатардың жинақталатыны шығады.

2) $\alpha-1<0$ болсын, онда ақырсыздық бөлшектің алымына шығады, онда бөлшектің шегі жоқ. Ендеше, қатар жинақталмайды.

3) $\alpha-1=0$, $\alpha=1$ болсын, меншіксіз интегралды жеке қарастырамыз:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_1^{\beta}\frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to+\infty}\ln x\Big|_1^{\beta}=\lim_{\beta\to+\infty}\ln\beta=\infty,$$

қатар жинақсыз. Сонда $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\begin{cases}-\frac{1}{1-\alpha}, & егер\ \alpha>1\\ +\infty, & егер\quad \alpha<1\end{cases}$

Демек, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ меншіксіз интегралы $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $\alpha<1$ болғанда жинақсыз болады екен. Сондықтан, (2.3) қатары $\alpha>1$ болғанда жинақты, ал $\alpha<1$ болғанда жинақсыз.

1 - **мысал.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{n^4-9}$.

қатарларын интегралдық белгі бойынша жинақтылыққа зерттеңіз

Шешуі: Берілген қатардың $a_n = f(n)$ жалпы мүшесінің өрнегіндегі n номерін үзіліссіз x айнымалысымен алмастырамыз да, алынған $f(x)$ функциясы x-тің өзгеруінің шексіз интервалында үзіліссіз және кемімелі болатынына көз жеткіземіз. Сонан соң $f(x)$-тің жоғарғы шегі жоқ меншіксіз интегралын табамыз.

1) $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1}dx = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_1^2 \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{\alpha\to+\infty} \ln(x^2+1)\Big|_1^2 = \ln(+\infty) - \ln 2 = +\infty$

Мұнда меншіксіз интеграл жинақсыз. Демек, интегралдық белгіге сәйкес, берілген қатар да жинақсыз.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4}\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\alpha} (4x+1)^{-\frac{1}{2}} d(4x+1) = \frac{1}{4}\lim_{\alpha\to+\infty} 2\sqrt{4x+1}\Big|_0^{\alpha} =$

$\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+\infty} (\sqrt{4\alpha+1}-1) = +\infty.$

3) $\int_3^{+\infty} \frac{xdx}{x^4-9} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+\infty} \int_3^{\alpha} \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-9} = \frac{1}{12}\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{x^2-3}{x^2+3}\Big|_3^{\alpha} =$

$$\frac{1}{12}\lim_{\alpha\to+\infty} (\ln\frac{\alpha^2-3}{\alpha^2+3} - \ln\frac{6}{12}) = \frac{1}{12}(\lim_{\alpha\to+\infty} \ln\frac{1-\frac{3}{\alpha^2}}{1+\frac{3}{\alpha^2}} - \ln\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}\ln 2$$

Сондықтан, интегралдық белгіге сәйкес 2) және 4) қатарлар жинақталады да, ал 3) қатар жинақсыз.

Бақылау сұрақтары:

1. Кошидің радикалдық белгісі қалай тұжырымдалады және қандай қатарларға қолданылады?
2. Кошидің радикалдық белгісі бойынша қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы қалай анықталады?
3. Кошидың интегралдық белгісі қалай тұжырымдалады және оны қолдану үшін қандай шарттар орындалуы қажет?

4. Кошидың интегралдық белгісі бойынша сандық қатардың жинақтылығы қалай зерттеледі?
5. Кошидің радикалдық және интегралдық белгілерінің ерекшеліктері мен қолданылу жағдайлары қандай?