5-дәріс. Қатарларды салыстыру белгілері
6-дәріс. Даламбер белгісі.

Дәріс жоспары:

1. Оң мүшелі сандық қатарлар және олардың жинақтылығын зерттеу.
2. Қатарларды салыстырудың негізгі белгілері және оларды қолдану.
3. Қатарларды салыстырудың шектік белгісі және оның дәлелдемесі.
4. Даламбер белгісі, оның тұжырымдалуы және қатарлардың жинақтылығын зерттеуде қолданылуы.

Бізге, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі, яғни дербес қосындысының шегі қатардың қосындысы деп аталатыны белгілі. Дегенмен, бұл шекті анықтау барлық уақытта оңайға соқпайды. Мұндай жағдайларда қатардың қосындысын жеткілікті үлкен n нөмірлі S_n дербес қосындысымен алмастыру арқылы жуықтап анықтайды. Бірақ, қатардың жинақты болатынына күмәніміз болмауы керек. Көп жағдайларда, қатардың жинақты немесе жинақсыз екенін тағайындау үшін жеткілікті белгілер деп аталатын шарттарды пайдаланамыз. Бұл параграфта мүшелері оң қатардың жинақты болуының жеткілікті белгілерін қарастырамыз. Мұндай қатарларды оң таңбалы қатарлар дейді.

Оң таңбалы қатарлардың мүшелері оң сандар болғандықтан, оның

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

дербес қосындылары n нөмірі өскенде артады. Сонымен, қатардың дербес қосындылары біркелкі үдемелі сандық тізбекті $S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \cdots$ түзеді.

Мұнда мынадай екі жағдай орын алуы мүмкін:

1. Дербес қосындылар тізбегі шектелмеген. Бұл жағдайда, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Демек, қатар жинақсыз болады.

2. Дербес қосындылар тізбегі шектелген, яғни кез келген n нөмірі үшін $S_n < C$. Бұл жағдайда, дербес қосындылар тізбегінің шектеулі шегі бар болғандықтан, қатар жинақты болады.

Сонымен, берілген оң таңбалы қатардың жинақты болатынын дәлелдеу үшін оның дербес қосындылар тізбегінің шектелгендігін көрсету жеткілікті екен. Енді оң таңбалы қатардың жинақсыз немесе жинақты болуының жиі кездестін белгілерін қарастырайық.

1°.Қатарларды салыстыру белгілері

Оң қатарлардың жинақты не жинақсыздығын көптеген жағдайларда оларды жинақтылығы не жинақсыздығы алдын ала белгілі қатарлармен салыстыру арқылы анықталады.

а) Бірінші салыстыру белгісі

1-теорема . Екі

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots (A)$ және $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots (B)$

оң таңбалы қатарлары берілген дейік.

Айталық бірінші қатардың мүшелері екінші қатардың сәйкес мүшелерінен артық болмасын:

$$a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, a_3 \le b_3, \cdots, a_n \le b_n, \cdots \qquad (2.1)$$

және (В) қатары жинақты болсын. Сонда (А) қатары да жинақты және оның қосындысы (В) қатарының қосындысынан артпайды.

Дәлелдеу. (А) және (В) қатарларының дербес қосындыларын сәйкес S_n және σ_n деп белгілейік:

(2.1) теңсіздіктерінен $S_n \le \sigma_n$ болатыны шығады. Ал (В) қатары жинақты болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ шегі бар. Сонымен бірге оң таңбалы қатар болғандықтан $\sigma_n < \sigma$ теңсіздігі орындалады. Шарт бойынша $S_n < \sigma_n$. Сонда $S_n < \sigma$ теңсіздігі де дұрыс болады. Сонымен, (А) қатарының дербес қосындылары шектелген, сондықтан ол жинақты және оның қосындысы (В) қатарының қосындысынан артық емес екен.

2-теорема. Айталық $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ (А) және $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$ (В) қатарлары берілсін. Сонымен бірге $a_1 \ge b_1, a_1 \ge b_2, \cdots, a_n \ge b_n, \cdots$ және (В) қатары жинақсыз болсын. Сонда (А) қатары да жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. (А) және (В) қатарларының дербес қосындыларын сәйкес S_n және σ_n деп белгілейік:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \sigma_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

Ал (В) қатары жинақсыз болғандықтан, оның дербес қосындылары артады, сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Бұл жағдайда,

$S_n \geq \sigma_n$ болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ болады. Демек, (А) қатары да жинақсыз.

Салыстыру белгісін қолдану үшін көбінесе төмендегі стандартты қатарларды қолданады:

1) геометриялық қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ - $|q| < 1$ болғанда жинақты, ал $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз.
2) гармониялық қатар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - жинақсыз қатар;
3) жалпыланған гармониялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots$$

$\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha \leq 1$ болғанда жинақсыз. Мұны біз сәл кейінірек дәлелдейміз.

Қатарларды салыстыру белгілерін пайдаланып, қатарларды зерттеуде геометриялық прогрессия, гармониялық қатар және жалпылама гармониялық қатар жиі қолданылады.

1-мысал. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$ (2.2)

қатарын зерттейік.

Шешуі. Көмекші қатарды қарастырайық:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \qquad (2.3)$$

Бұл еселігі $q=\frac{1}{2}<1$ болатын кемімелі геометриялық прогрессия. Сондықтан, ол жинақты. Ал (2.5) қатарының мүшелері (2.6) қатарының сәйкес мүшелерінен артпайды. Демек, 1-теоремаға сәйкес (2.5) қатары да жинақты екен.

2) Екінші салыстыру белгісі. Кей жағдайларда салыстыру белгісі ретінде шектік салыстыру белгісі қолданылады.

Теорема (шектік салыстыру белгісі). $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатарларының мүшелері оң болсын. Егер ақырлы, нольге тең емес $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$ шегі бар болса, онда осы екі қатар не бірдей жинақты, не бірдей жинақсыз.

Дәлелдеуі. Егер $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ болса, онда шектің анықтамасы бойынша кез келген $\varepsilon>0$ саны мен барлық $n>N$ үшін $\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай N номері табылады. Егер $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ жинақты болса, онда жинақты қатарлардың бірінші қасиеті бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)b_n$ қатары жинақты. Олай болса, салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатары жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)b_n$ қатары, демек, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатары жинақты. Сонымен бір қатардың жинақтылығынан екінші қатардың жинақтылығы шығады. Қатарлардың бірдей жинақсыздығы да осылай дәлелденеді.

3-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ қатарын жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1>0$ болғандықтан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ гармониялық қатары жинақсыз болатыны белгілі, олай болса, берілген қатар да жинақсыз.

2°**. Даламбер белгісі.** Егер оң таңбалы

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (2.6)$$

қатарының $(n+1)$- мүшесінің n-мүшесіне қатынасының $n\to\infty$-дағы шегі, яғни

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell \qquad (2.7)$$

шегі бар болса, онда $\ell<1$ болғанда қатар жинақты, ал $\ell>1$ болғанда жинақсыз болады.

Дәлелдеу. а) Айталық $\ell<1$ болсын. Қатардың жинақты болатынын көрсетейік. Шынында $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$ болғандықтан, шектің анықтамасына сәйкес кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $N=N(\varepsilon)$ нөмірін $n\geq N$ болғанда қатардың барлық мүшелері $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\ell\right|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап алуға болады. Бұдан, $-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\ell<\varepsilon$ немесе $\ell-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\ell+\varepsilon$ болатыны шығады. Ал $\ell+\varepsilon=q$ десек, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q$ теңсіздігін аламыз. Теорема шарты бойынша $\ell<1$ және $\varepsilon-$жеткілікті аз оң сан болғандықтан, оны $q=\ell+\varepsilon<1$ теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап алу мүмкін болады. Сонымен, $n\geq N$ болғанда

$\dfrac{a_{N+1}}{a_N}<q,\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q,\dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<q,\cdots$ немесе

$a_{N+1}<a_Nq,a_{N+2}<a_{N+1}q<a_Nq^2,a_{N+3}<a_{N+2}q<a_Nq^3,\cdots$

теңсіздіктері орындалады екен.

Енді $a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots$ (2.8)

$$a_N + a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \cdots \quad (2.9)$$

қатарларын қарастырайық. (2.9) қатары жинақты. Өйткені ол еселігі $q < 1$ болатын кемімелі геометриялық прогрессия. Ал (2.8) қатардың мүшелері (2.9) қатардың сәйкес мүшелерінен артпайды. Сондықтан, салыстыру белгілері бойынша (2.8) қатары да жинақты.

Бірақ (2.8) қатар (2.6) қатардың $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-1}$ саны шекті мүшелері қосындысын шығарып тастаған. Демек, 1-параграфта келтірілген 3-теоремаға сәйкес (2.6) қатары да жинақты екен.

ә) Айталық $\ell > 1$ болсын. Қатардың жинақсыз болатынын көрсетейік. Шынында, бұл жағдайда,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ болғандықтан, жеткілікті үлкен $n \geq N$ нөмірден бастап $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ немесе $a_{n+1} > a_n$ теңсіздігі орындалады. Сонымен, n нөмірлі мүшесінен бастап, қатардың мүшелері артады. Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, яғни жинақты қажетті шарты бұзылады. Демек, қатар жинақсыз болады екен.

1-ескерту. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ болса, онда қатар жинақсыз болады. Өйткені, бұл жағдайда жеткілікті үлкен n үшін $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болады.

2-ескерту. Егер Даламбер белгісімен қатардың жинақсыз болатыны дәлелденсе, онда оның n-мүшесі нолге ұмтылмайды.

3-ескерту. $\ell = 1$ болғанда, Даламбер белгісі қатардың жинақты, не жинақсыз болатынына жауап бере алмайды. Бұл жағдайда, қатар жинақты болуы немесе жинақсыз болуы мүмкін. Даламбер белгісін қолданып, қатарлардың жинақты болатынын анықтауға бірнеше мысалдар қарастырайық

2-мысал. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}+\cdots$ қатарын зерттейік.

Шешуі. $\ell=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ шегін есептейік. $a_n=\frac{2n-1}{3^n};a_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}$

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}}:\frac{2n-1}{3^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n+1)}{3^{n+1}\cdot(2n-1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\cdot1=\frac{1}{3}<1.$$

Демек, берілген қатар жинақты.

Даламбер белгісімен қатардың жинақты, не жинақсыз болатынына жауап ала алмаған жағдайда, яғни $\ell=1$ болғанда, салыстыру белгілерінен басқа тағы да бір жеткілікті белгілерді қолдану мүмкін болады. Енді тағы бір жеткілікті белгіні -Кошидің белгісін келтірейік.

Бақылау сұрақтары:

1. Оң мүшелі сандық қатар дегеніміз не және оның жинақтылығы қалай анықталады?
2. Қатарларды салыстырудың негізгі белгісі қалай тұжырымдалады?
3. Қатарларды салыстырудың шектік белгісі қандай және ол қалай қолданылады?
4. Даламбер белгісі қалай тұжырымдалады және оның математикалық өрнегі қандай?
5. Даламбер белгісі қандай жағдайларда қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы туралы қорытынды жасауға мүмкіндік береді?