3-дәріс. Қатардың жинақты болуының қажетті шарты
4-дәріс. Қатардың жинақты болуының Коши критериі

Дәріс жоспары:

1. Сандық қатардың жинақтылығы және оның қажетті шарты.
2. Қатардың жинақтылығының қажетті шартының дәлелдемесі және оны қолдану.
3. Сандық қатардың жинақтылығының Коши критериі және оның тұжырымдалуы.
4. Коши критерийінің дәлелдемесі және қатарлардың жинақтылығын зерттеуде қолданылуы.

1.Қатардың жинақты болуының қажетті шарты

Қатарларды қарастыруда мынандай екі мәселе туады:

1) қатардың жинақты, не жинақсыз болатынын анықтау және

2) қатар жинақты болған жағдайда, оның қосындысын табу. Алғашқы есептің теориялық маңызы бар болғандықтан, оны шешу мәселесін қарастырайық. Қатардың жинақты болуының қажетті шартын келтірейік.

5-теорема. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болса, онда оның a_n жалпы мүшесі n нөмірі шектеусіз өскенде нолге ұмтылады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Дәлелдеу. Қатар жинақталатын болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ және $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ болатыны айқын. Енді берілген қатардың екі дербес қосындысын құрайық: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ және

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$.Сонда бұдан $S_n - S_{n-1} = a_n$. Енді осы теңдікте шекке көшсек мынау шығады:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Демек $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Теорема дәлелденді.

Салдар(Қатардың жинақсыз болуының жеткілікті шарты).

Егер қатардың жалпы мүшесі n нөмірі шектеусіз артқанда нөлге ұмтылмайтын болса, онда қатар жинақсыз болады.

Шынында, егер қатарды жинақты десек, онда алдыңғы теоремаға сәйкес қатардың жалпы мүшесі нольге ұмтылған болар еді. Бірақ, бұл шартқа қайшы. Сондықтан, қатар жинақсыз. Мысалы, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$ қатарының n-мүшесі $a_n=\frac{n}{n+1}$. Сонда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$ болғандықтан, қарастырып отырған қатар жинақсыз болады. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ шарты қатардың жинақты болуының **қажетті** шарты болады. Бірақ ол жеткілікті емес. Бұл айтылғаннан, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ шарты орындалғанмен, жинақты болмайтын қатарлардың бар екенін көрсетеді. Оған $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ қатары мысал болады. Мұнда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ болғанымен, бұл жинақсыз екенін дәлелдеуге болады. Ол үшін қатардың $S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ дербес қосындысын қарастырайық. Мұнда $\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$,... Ал мұндағы әрбір санды, өзінен кіші $\frac{1}{\sqrt{n}}$ санымен алмастырсақ $S_n>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ немесе $S_n>n\cdot\frac{1}{n}$, яғни $S_n>\sqrt{n}$ болады. Бұл теңсіздікте $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ болатынын оңай көруге болады. Сондықтан берілген қатар жинақсыз.

Екінші мысал ретінде мына $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ гармониялық деп аталатын қатарды қарайық. Бұл қатар үшін қажетті шарт орындалып тұр: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Осыған қарамастан қатардың жинақсыз қатар екендігін көрсетелік. Ол үшін гармониялық қатардың алғашқы $2n$ мен n мүшелерінің қосындыларын қарастырамыз:

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n},\quad S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Сонда $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$. Теңдіктің оң жағындағы әрбір мүше $\frac{1}{2n}$ санынан үлкен. Сондықтан, оларды $\frac{1}{2n}$ санымен алмастырсақ теңсіздік аламыз:

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\text{ яғни } S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}.$$

Егер гармониялық қатар жинақты болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$ болар еді, сондықтан $\frac{1}{2}<\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S-S=0$ немесе $\frac{1}{2}<0$. Бұлай болуы мүмкін емес, сондықтан гармониялық қатар жинақсыз.

4-мысал. Қатардың жалпы мүшесі a_n-нің $n\to\infty$ шегін тауып, егер $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, болса, онда жинақтылықтың қажеттілік шартын қолдана отырып, қатардың жинақсыз болатынын көрсету қажет.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+2}$

Шешуі. а) қатардың жалпы мүшесінің шегін табамыз:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=$$

(Бөлшектің алымы мен бөлімін n-ге бөлеміз)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

демек, қатар жинақсыз. Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$; қатар жинақсыз.

б) $n \to \infty$-да $(n+2) \to \infty$ және $\ln(n+1) \to \infty$ болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ шегін табу үшін Лопиталь ережесін пайдаланамыз:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)'}{(\ln(x+1))'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{(x+1)}} = \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty$$

Мұнан $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{\ln(n+1)} = \infty \neq 0$ екендігі және қатардың жинақсыз екендігі шығады.

в) қатардың жалпы мүшесінің шегін табамыз:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+2} =$$

(Бөлшектің алымы мен бөлімін n^3-ге бөлеміз)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 : n^3}{(n^3+2) : n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болғандықтан, берілген қатар жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.

Шындығында берілген қатар, төменде көрсетілетіндей, жинақсыз болады, алайда, жинақтылықтың тек қажетті шартын пайдалана отырып мұны дәлелдеу мүмкін емес.

Осылайша, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; қатардың жинақталуы да, жинақталмауы да мүмкін.

2) Қатардың жинақты болуының Коши критериі

Теорема (Коши критериі). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болуы үшін берілген кез келген ε > 0 саны үшін бір $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, сол қатардың мүшелерінің n>N теңсіздігін қанағаттандыратын нөмірлері үшін және кез келген натурал *p* саны үшін

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| = \left| a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Ескерту. Анықтама бойынша,
$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$; $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)$; $0!! = 1$) болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Сандық қатардың жинақты болуының қажетті шарты қалай тұжырымдалады?
2. Қатардың жинақтылығының қажетті шарты қалай дәлелденеді?
3. Қатардың жинақтылығының қажетті шарты жеткілікті шарт бола ала ма? Неліктен?
4. Сандық қатардың жинақтылығының Коши критериі қалай тұжырымдалады?
5. Коши критерийі арқылы сандық қатардың жинақтылығы қалай анықталады?