29-дәріс. Периоды $2l$ функциясын Фурье қатарына жіктеу.
30-дәріс. Периодты емес функцияларды жіктеу туралы. Фурье қатарының комплекс түрі.

Дәріс жоспары

1. Периоды 2l болатын функцияның Фурье қатары және оның жалпы түрі.
2. Периоды 2l болатын функцияның Фурье коэффициенттерін есептеу және жинақталу шарттары.
3. Периодты емес функцияларды Фурье қатарына жіктеу және функцияны периодты жалғастыру тәсілдері.
4. Фурье қатарының комплекс түрі, комплекс Фурье коэффициенттері және олардың қасиеттері.

1. Периоды $2l$ функциясын Фурье қатарына жіктеу.

Бізге $[-l;l]$ кесіндісінде анықталған және периоды $2l$ -ге тең периодты $f(x)$ функциясы берілсін. Осы функцияны $[-l;l]$ кесіндісінде Фурье қатарына жіктелік. $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ функциясын қарастырамыз. Бұл функция t аргументі бойынша периоды 2π -ге тең периодты функция болып табылады, өйткені $t=\pi$, онда $f(l)$; егер $t=-\pi$, онда $f(-l)$. Ендеше, оны $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде Фурье қатарына жіктеуге болады, яғни

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

мұндағы коэффициенттер мына формулалармен табылады:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ntdt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin ntdt.$$

Енді бастапқы айнымалыға көшейік:

$$x=\frac{l}{\pi}t\Rightarrow t=\frac{\pi}{l}x,\quad dt=\frac{\pi}{l}dx;\quad x_1=-l;\ x_2=l.$$

Сонда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt=\left|\begin{matrix}x=\frac{l}{\pi}t, & dx=\frac{l}{\pi}dt\\ x_1=-l & x_2=l\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx.$$

Қалған коэффициенттер де осылай анықталады:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ntdt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Сонымен, $[-l;l]$ кесіндісінде периодты функция үшін Фурье қатарын алдық:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

мұның коэффициенттері төмендегі формуламен табылады

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Бұл іздеп отырған периоды $2l$ болатын функцияның Фурье қатары.

Егер $f(x)$ функциясы $[-l;l]$ аралығында жұп функция болса, онда оның Фурье қатары

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

ал коэффициенті

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

Егер $f(x)$ функциясы $[-l;l]$ аралығында тақ функция болса, онда оның Фурье қатары

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{және} \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n = 0,1,2,\ldots).$$

1-мысал. Периоды $2l = 4$-ге тең $f(x) = \begin{cases} 0, & егер \quad -2 < x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & егер \quad 0 < x < 2 \end{cases}$ функциясын (-2;2) интервалында Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Функцияның өзі сияқты оның бірінші туындысы (-2;2) аралығында үзіліссіз. Демек, функцияны Фурье қатарына жіктеуге болады. Біздің жағдайымызда $l = 2$.

Фурье коэффициенттерін есептейміз:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{2}\cos\frac{\pi n x}{2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi^2 n^2}, \text{ егер} \quad n - \text{тақ болса,} \\ 0, \text{ егер} \quad n - \text{жұп болса;} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{2}\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{-4(-1)^n}{\pi n}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Сонымен, функцияның әрбір үзіліссіздік нүктесінде:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{\pi n x}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right].$$

Функцияның үзіліс нүктесінде қатар $\frac{1}{2}$ мәніне – функцияның оң жақ және сол жақ мәндерінің арифметикалық ортасына жинақталады.

2. Периодты емес функцияларды жіктеу туралы.

Периодты емес функцияларды бір $[0;l]$ кесіндісінде жіктеу былай орындалады:

1) егер $f(x)$ үзіліссіз болса, онда оны $[-l;0]$ кесіндісіне тақ болатындай етіп толықтырамыз, сонда графигі тақ функцияның графигіндей болады. Периоды $2l$ бойынша периодты жалғастырамыз, онда функцияны Фурье қатарына тек синус бойынша жіктеуге болады;

2) егер $f(x)$ функциясы $[0;l]$ кесіндісінде жұп болса, онда оны $[-l;0]$ кесіндісінде жұп болатындай етіп толықтырамыз. Әрі оны $2l$ периоды бойынша жалғастырамыз, онда функцияны Фурье қатарына тек косинус бойынша жіктейміз.

Периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу туралы ескерту.

1-мысал. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ функциясын $]0,2\pi[$ аралығында жіктейік.

Шешімі. Функцияның Фурье коэффициенттерін анықтайық:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi^2 - 2\pi^2\right) = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\begin{array}{ll} u = \dfrac{\pi - x}{2}, & du = -\dfrac{1}{2}dx \\ dv = \cos\kappa x\,dx, & v = \dfrac{1}{k}\sin\kappa x \end{array}\right| = \frac{\pi - x}{2\pi k}\sin kx\Bigg|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{1}{2\pi k}\int_{0}^{2\pi}\sin kx\,dx = -\frac{1}{2\pi k^2}\cos kx\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left|\begin{matrix} u = \frac{\pi - x}{2}, & du = -\frac{1}{2}dx \\ dv = \sin kx dx, & v = -\frac{1}{k}\cos kx dx \end{matrix}\right| = -\frac{\pi - x}{2\pi k}\cos kx\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\cos kx dx = \frac{\pi}{2\pi k}\left(\cos 2k\pi + 1\right) + \frac{1}{2\pi k^2}\sin kx\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k}$$

Сонымен, Фурье қатары мына түрде жазылады:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \quad \left(x \in]0;2\pi]\right).$$

Мұндағы $x = \frac{\pi}{2}$ десек, Лейбниц қатары деп аталатын қатар алынады:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Айталық, $f(x)$ функциясы $[0, \ell]$ кесіндісінде берілсін. Бұл функцияны $[-\ell, 0]$ кесіндісінде ерікті түрде толықтыру арқылы, оны Фурье қатарына жіктеуге болады. Дербес жағдайда, функцияны жұп функция ретінде, не тақ функция ретінде толықтыруға болады.

3. Фурье қатарының комплекс түрі. Кейбір жағдайларда Фурье қатарын

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \qquad (7.1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

Эйлер формуласын

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right), \qquad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

қолданып комплекс түрде қолданған қолайлы болады.

Эйлер формуласын (7.1) қатарға апарып қойсақ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2i}\right) = \qquad (7.15)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right)$$

Енді

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \; C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \qquad (n = 1,2,...) \qquad (7.16)$$

белгілеулерін енгізіп, (7.15) былай жазуға болады:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{inx} + C_n e^{-inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx} \qquad (7.17)$$

(7.17) – Фурье қатарының комплекс түрі, ал (7.16) коэффициенттер $[-\pi;\pi]$ аралығындағы анықталған $f(x)$ функциясының Фурье қатарының коэффициенттері деп аталады.

Енді C_n коэффициенттерді табу үшін (7.17) теңдіктің екі жағын l^{-imx}-ке көбейтіп шыққан нәтижені $-\pi$ мен π аралығында интегралдасақ $(m \neq n)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} C_n e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{1}{(n-m)i} C_n e^{(n-m)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{C_n}{(n-m)i}\left[e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}\right] = \frac{2C_n}{n-m}\sin\pi(m-n) = 0.$$

Ал $m = n$ болғанда интеграл $2C_n\pi$-ге тең болады.

Сондықтан

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \qquad n \in Z.$$

Фурье қатарының комплекс түрі $(-l;l)$ аралығында былай жазылады:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\pi k}. \quad \text{Мұндағы } C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx.$$

Бақылау сұрақтары

1. Периоды 2l болатын функцияның Фурье қатары қалай жазылады?
2. Периоды 2l болатын функцияның Фурье коэффициенттері қандай формулалар арқылы есептеледі?
3. Периодты емес функцияларды Фурье қатарына жіктеу қалай жүзеге асырылады?
4. Фурье қатарының комплекс түрі қалай жазылады және оның тригонометриялық түрімен қандай байланысы бар?
5. Комплекс Фурье коэффициенттері қалай анықталады және олардың негізгі қасиеттері қандай?