27-дәріс. Функцияны Фурье қатарына жіктеу.

28-дәріс. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарлары.

Дәріс жоспары

1. Функцияны Фурье қатарына жіктеу әдістері және Фурье қатарының жинақталу шарттары.
2. Периодты функцияларды Фурье қатарына жіктеу және Фурье коэффициенттерін есептеу.
3. Жұп функцияларды Фурье қатарына жіктеу және косинустар қатары.
4. Тақ функцияларды Фурье қатарына жіктеу және синустар қатары.

Функцияны Фурье қатарына жіктеу. Фурье қатары $f(x)$ функциясына жіктелген жинақты және оның қосындысы $f(x)$-ке тең болуы үшін қандай қасиеттерге ие болатынын көрсетейік.

Мынадай жаңа ұғымдар енгізейік.

1) $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісін $a_0 = a < a_1 < a_2 < .... < a_n = b$

нүктелері арқылы бөлу нәтижесінде алынған әрбір аралықта біркелкі өзгеретін болса, онда $f(x)$ функциясын $[a,b]$ кесіндісінде бөліктері – біркелкі функция деп атайды.

2) $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісін $b_0 = b < b_1 < b_2 < .... < b_n = b$

нүктелері арқылы бөлу нәтижесінде алынған әрбір аралықта үздіксіз және туындылары бар, сонымен бірге $b_i (i = 0,1,2,...,n)$ нүктелерінде функция мен оның туындыларының солжақты және оңжақты шектеулі шектері бар болса, онда $f(x)$ функциясын $[a,b]$ кесіндісінде бөлікті-дифференциалданатын функция деп атайды.

Айта кететін нәрсе: $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде бөлікті-дифференциалданатын болса, ол бөлікті-біркелкі функция да болады.

Шектелген бөліктері-біркелкі және бөлікті-дифференциалданатын функцияның $[a,b]$ кесіндісінде саны шектеулі үзіліс нүктелері бар болуы мүмкін.

Периодты $f(x)$ функциясының Фурье қатарына жіктелуінің қажетті және жеткілікті шарттарын көрсететін негізгі теореманы, **Дирихле теоремасын** дәлелдеусіз келтірейік.

Егер периоды 2π болатын $f(x)$ функциясы $[-\pi,\pi]$ кесіндісінде бөліктері-біркелкі болса, онда оның Фурье қатары функцияның барлық үздіксіз нүктелерінде $f(x)$-ке жинақты болады.

Егер x_0-нүктесінде функция шектеулі, әрі үзілісті болса, онда Фурье қатарының қосындысы бұл нүктеде

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

шамасына тең, яғни x_0 нүктесіндегі функцияның солжақты және оңжақты шектерінің арифметикалық ортасына тең болады. Ал, $x=\pm\pi$ нүктелерінде Фурье қатарының қосындысы

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

шамасына тең, яғни $-\pi$ нүктесіндегі оңжақты және π нүктесіндегі солжақты шектерінің арифметикалық ортасына тең.

Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарлары.

Егер барлық сан өсінде анықталған $\varphi(x)$ функциясы үшін координаталар басына симметриялы орналасқан кез келген кесіндіде $f(x)=f(-x)$ теңдігі орындалса, ол жұп, ал егер $f(x)=-f(-x)$ теңдігі орындалса, ол тақ функция деп аталатыны бізге белгілі.

Осы ұйғарымды жалпы түрде дәлелдейік.

1– лемма. Егер $[-l;l]$ аралығында интегралданатын $f(x)$ функциясы жұп болса, онда

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx, \qquad (7.5)$$

ал тақ функция болса, онда

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0 \qquad (7.6)$$

болады.

Дәлелдеу: Анықталған интегралдың қасиеті бойынша $\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{0} f(x)dx.$ Соңғы интегралда $x = -u, dx = -du$ алмастыруын алсақ, $\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{l} f(-u)du$ болады. Сондықтан соңғы интегралдағы интегралдау айнымалысын x-пен ауыстырсақ ,

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(-x)dx \qquad (7.7)$$

болады. (7.7) формуласынан, егер $f(x)$ функциясы жұп болса, онда (7.5) теңдігінің дұрыс болатыны, ал тақ болса, онда (7.6) формуласы дұрыс болатыны шығады.

Дәлелденген лемма бойынша периоды 2π болатын жұп $f(x)$ функциясы үшін Фурье коэффициенттері

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad b_n = 0, \qquad (7.8)$$

формуласымен анықталады. Өйткені, кез келген $n \in N$ үшін $f(x)\cos nx$ функциясы жұп, ал $f(x)\sin nx$ функция тақ функция.

Сонымен, жұп функция Фурье қатарына тек косинусы бойынша ғана жіктеледі:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos kx, \qquad (7.9)$$

ал a_0, a_n коэффициенттері (7.8) формуласымен анықталады. Тақ функциясы үшін

$$a_0 = 0, a_k = 0,\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kxdx \qquad (7.10)$$

болады. Өйткені, $f(x)\cos kx$-тақ функция, $f(x)\sin kx$ жұп функция. Демек, тақ функция Фурье қатарына тек синус бойынша ғана жіктеледі:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \qquad (7.11)$$

ал b_n коэффициенттері (7.10) формула бойынша есептеледі.

2-лемма. Егер $f(x)$ функциясы – периоды 2π периодты функция болса, онда мына формула

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx \qquad (7.12)$$

орындалады, мұндағы λ - кез келген сан.

Дәлелдеу. Интегралды қарастырамыз:

$$\int_{c}^{d} f(x)dx = \left| \begin{array}{ll} x+2\pi = u, & f(x) = f(u-2\pi) = f(u) \\ dx = du, & u_1 = c+2\pi,\ u_2 = \alpha+2\pi \end{array} \right| = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(u)du\,.$$

Бұл аралықты кез келген c мен d үшін дұрыс:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(x)dx \qquad (7.13)$$

$c=-\pi,\ d=\lambda$ делік, сонда (7.12) теңдігі мына теңдікке көшеді:

$$\int_{-\pi}^{\lambda} f(x)dx = \int_{\pi}^{\lambda+2\pi} f(x)dx \qquad (7.14)$$

Интегралды $-\pi$-ден π-ге дейін қарастырамыз, интегралдың қасиеті бойынша екі интегралдың қосындысына тең:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\lambda} f(x)dx + \int_{\lambda}^{\pi} f(x)dx$$

Оң бөлігіндегі бірінші интегралды (7.13) формуласы бойынша ауыстырамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx + \int_{\lambda}^{\pi} f(x)dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx$$

Теорема дәлелденді.

Бұл ескертудің бір ыңғайлылығы интегралды $-\pi$-ден π-ге дейін есептегенде оны λ-дан $\lambda+2\pi$-ге дейін есептеумен алмастыруға болады. Мысалы,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx.$$

Бұл формулаларды интегралданатын функция $[0;\pi]$ кесіндісінде берілген жағдайларда да қолдануға болады. Ол үшін бұл функцияларды $[0;\pi]$ кесіндісінен $[-\pi;0]$ кесіндісіне жұп не тақ етіп созсақ пайда болған жұп не тақ функцияға (7.9) не (7..2) формуланы қолдануға, яғни, $[0;\pi]$ кесіндісінде берілген $f(x)$ функциясын Фурье қатарына косинустар немесе синустар бойынша жіктеуге мүмкіншілік туады.

1-мысал. $f(x)=x$ функциясын $[-\pi;\pi]$ кесіндісінде Фурье қатарына жіктеу керек.

Шешуі. Функция тақ, сондықтан $a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,...)$. Енді b_n коэффициенттерін (7.4) формула бойынша анықтасақ болады, яғни:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nxdx$$

Соңғы интегралды есептеу үшін бөліктеп интегралдау әдісін пайдаланамыз. $u = x, \quad dv = \sin nxdx.$ деп аламыз. Сонда $du = dx, \quad v = \int \sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx$, мұнан

$$\int_0^{\pi} x\sin nxdx = -\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx = -\frac{1}{n}(\pi\cos\pi n - 0) + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{\pi}{n}(-1)^n = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$$

шығады. Нәтижеде $b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}$ аламыз, демек,

$$f(x) = x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ...\right).$$

Бұл теңдікке $x=\frac{\pi}{2}$ мәнін қойсақ Лейбниц қатарына келеміз

$$\frac{\pi}{2}=2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}-\frac{\sin\pi}{2}+\frac{\sin 3\frac{\pi}{2}}{3}-\frac{\sin 2\pi}{4}+\ldots\right),$$ немесе

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}+\ldots$$

Шешуі. Функция $f(x)=x$ үзіліссіз тақ функция. Ал оның периодты созындысы $x=(2k+1)\pi,\quad k\in Z$ нүктелерінде үзілісті.

Берілген функция тақ болғандықтан, $a_n=0,$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\left|\begin{array}{ll} x=u, & dv=\sin nxdx \\ dx=du, & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{2}{n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Демек,

$$x=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\ldots\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$$

Егер $x=\frac{\pi}{2}$ болса, онда $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}.$

Периодты созындының $x=(2k+1)\pi,\ k\in z$ үзіліс нүктелерінде Фурье қатары нольге жинақталады, себебі:

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\left((2k+\pi)+0\right)+\sin\left((2k+1)\pi-0\right)\right]\equiv 0.$$

Бақылау сұрақтары

1. Функцияны Фурье қатарына жіктеу қалай жүзеге асырылады?
2. Фурье қатарының жинақталуы үшін қандай шарттар орындалуы қажет?
3. Жұп және тақ функциялардың негізгі қасиеттері қандай?
4. Жұп функцияның Фурье қатары қалай жазылады және оның коэффициенттері қалай есептеледі?
5. Тақ функцияның Фурье қатары қалай жазылады және оның коэффициенттері қалай анықталады?