25-дәріс. Тригонометриялық қатар ұғымы

26-дәріс. Фурье коэффициенттері және Фурье қатары.

Дәріс жоспары

1. Тригонометриялық қатар ұғымы және оның жалпы түрі.
2. Тригонометриялық функциялардың ортогоналдық қасиеттері.
3. Фурье коэффициенттері және оларды есептеу формулалары.
4. Фурье қатарының анықтамасы және функцияны Фурье қатарына жіктеу шарттары.

1. Тригонометриялық қатар ұғымы. Өткен тақырыпта функцияларды дәрежелік қатарларға жіктеуді қарастырдық, яғни әртүрлі функцияларды $a_n(x-x_0)^n$ түріндегі жай дәрежелік функцияларға жіктедік. Мұндай жіктелу барлық уақытта мүмкін болмайды және ыңғайлы бола бермейді. Әртүрлі периодты процестерді оқып, үйренуде бұл процестерді көрсету үшін функцияларды жай периодты функциялар – синус пен косинус арқылы жіктеу табиғи нәрсе.

Анықтама. Келесі функциялық қатар

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \qquad (7.1)$$

тригонометриялық қатар деп аталады, мұндағы a_0, a_k, b_k - тұрақты сандар. Оларды тригонометриялық қатардың коэффициенттері деп атайды. $\frac{a_0}{2}$ мүшесі бос мүше деп аталады. Ол ыңғайлы болуы үшін $\frac{a_0}{2}$ түрінде алынады.

Енді a_k және b_k коэффициенттерін анықтау кезінде керек болатын бірнеше көмекші формулаларды келтірейік.

Егер $n\neq 0$ болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0; \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

Кез келген бүтін n және k $(n\neq k)$ үшін

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right)dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(n-k)x - \cos(n+k)x\right)dx = 0.$$

Кез келген *n* және *k* сандары үшін

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin(n+k)x + \sin(n-k)x\right)dx = 0.$$

Егер $n = k$ болса, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n} \sin nx \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n} \sin nx \right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

(7.1) қатардың мүшелері периоды T = 2π периодты функциялар. Әрине ол қатар жинақты болса, онда оның қосындысы да периоды T = 2π болатын периодты функция болады.

Енді мынадай есепті қарастырайық: Периоды 2π болатын $f(x)$ функция берілсе, ол функция үшін бұл функцияға жинақты болатындай тригонометриялық қатарды қандай шарттар орындалғанда алу мүмкін болады? Осы есептің шешімін қарастырайық.

2.Фурье коэффициенттері және Фурье қатары. Бізге $[-\pi;\pi]$ аралығында анықталған периоды T = 2π болатын $f(x)$ функциясы берілсін.Енді $f(x)$ функциясы бір қалыпты жинақталатын тригонометриялық қатарға жіктелсін,яғни

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right). \qquad (7.1)$$

(7.1) қатар бірқалыпты жинақталады деп жорылғандықтан, оны мүшелеп интегралдауға болады, яғни

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx \right).$$

Ал $\cos kx$ және $\sin kx$ функцияларының $-\pi$-ден π-ге дейінгі интегралдары нөлге тең болғандықтан,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (7.2)$$

болады. Ал қалған a_k $(k = 1,2,3,...)$ коэффициенттерін анықтау үшін (7.1) қатардың екі жағын $\cos nx$ $(n \in N)$ өрнегіне көбейтеміз (одан қатардың бірқалыпты жинақтылығы бұзылмайды) де $-\pi$ мен π аралығында интегралдаймыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx \right).$$

Бұл теңдіктің оң жағында тек $k = n$ болғандағы интегралынан басқаларының барлығы да нольге айналады, яғни

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi$$

немесе

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \qquad (7.3)$$

Енді (7.1) қатардың екі жағын $\sin nx$ өрнегіне көбейтіп $[-\pi;\pi]$ аралығында интегралдасақ, онда оң жағында тек $k = n$ болғандағы интегралдан басқаларының барлығы нольге айналады, сондықтан

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \qquad (7.4)$$

болып анықталады.

Сонымен, (7.2), (7.3), (7.4) формулалардың көмегімен анықталған коэффициенттерді **Фурье коэффициенттері** деп, ал осындай коэффициенттері бар

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

тригонометриялық қатарын $f(x)$ функциясының **Фурье қатары** деп атайды.

Анықтама. Қатар

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

мұндағы

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ (n=1,2,3,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ (n=1,2,3,\ldots)$$

$f(x)$ функциясының **Фурье қатары** деп аталады.

Бұл формулалардан периоды 2π-ге тең кез келген интегралданатын $f(x)$ функциясына сәйкес Фурье қатарын құруға болады деген маңызды қорытынды шығады. Ал бірақ осы Фурье қатары әрқашанда $f(x)$ функциясына бір қалыпты жинақталады деген қорытынды шықпайды.

Бақылау сұрақтары

1. Тригонометриялық қатар дегеніміз не және оның жалпы түрі қалай жазылады?
2. Тригонометриялық функциялардың ортогоналдық қасиеттері қандай?
3. Фурье коэффициенттері дегеніміз не және олар қандай формулалар арқылы есептеледі?
4. Фурье қатары дегеніміз не және оның тригонометриялық қатардан айырмашылығы қандай?
5. Функцияны Фурье қатарына жіктеу үшін қандай шарттар орындалуы қажет?