23-дәріс. Дәрежелік қатарлардың жуықтап есептеуге қолданылуы

24-дәріс. Эйлер формулалары.

Дәріс жоспары

1. Дәрежелік қатарларды функциялардың мәндерін жуықтап есептеуде қолдану.
2. Дәрежелік қатарлар арқылы анықталған интегралдарды жуықтап есептеу және есептеу қателігін бағалау.
3. Комплекс айнымалының көрсеткіштік функциясы және Эйлер формулалары.
4. Эйлер формулаларының көмегімен тригонометриялық функцияларды өрнектеу және олардың қасиеттері.

1. Дәрежелік қатарлардың жуықтап есептеуге қолданылуы

Егер $f(x)$ функциясы бір аралықта Тейлор қатарына жіктелетін болса, яғни $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ осы қатардың жинақталатын аралығында ол функцияның жуық мәні үшін қатардың дербес қосындысын $f(x)\approx S_n(x)$-ті алуға болады. Сонда біздің жіберетін қатеміз қалдықтың абсолют шамасына тең, яғни $|f(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|$ болар еді. Бұл жерде *n* өскен сайын қате кішірейе түсетіні өзінен өзі түсінікті. Сонымен, $f(x)$ функциясының жуық мәнінің дәлдігі Тейлор қатарының сол функцияға жуықтауына тәуелді болды. Егер қатар тез жинақталса, оның дербес қосындысына аздаған мүшелер енетіні өзінен өзі түсінікті.

1-мысал. $\sqrt[3]{130}$ -дің мәнін 0,0001-ге дейінгі дәлдікпен есептеп шығару керек.

Шешуі. Биномдық қатарды

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k+\ldots$$

пайдаланамыз.

Бұл қатар $-1<x<1$ болғанда жинақталады, сол себепті берілген түбірді мына түрде жазамыз:

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}=5\cdot\left(1+\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Сонда функция $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ -нің қатарға жіктелісі мынадай болады:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots$$

Енді *x*-тің орнына $\frac{1}{25}$-ді апарып қойсақ, сан қатары шығады:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!\cdot 5^8}+\ldots$$

Бұл қатардың таңбасы кезектесіп келіп отырады, сондықтан оның қосындысының жуық мәні есебінде қатардың бірінші *n* мүшесінің қосындысын алсақ, жіберген абсолют қателік алмай тастаған ең бірінші мүшеден кем болады. Ал біз түбірдің мәнін 0,0001-ге дейінгі дәлдікпен есептеп шығаруымыз керек, сол себепті біз қатардың үш мүшесін алуға тиіспіз. Шынында, төртінші мүшені беске көбейткеннің өзінде

$$\frac{5\cdot 1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}=\frac{1\cdot 2}{27\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^4}=\frac{1}{81\cdot 625}<0{,}0001$$

болып шығады.

Қатардың әрбір мүшесін 5-ке көбейтеміз, сонда: 5,00000+0,06667-0,00089=5,06578 болады.

Сонымен, $\sqrt[3]{130}\approx 5{,}0658$ (0,0001-ге дейінгі дәлдікпен).

2. Эйлер формулалары. Шексіз қатарлар теориясын комплекс айнымалы облысына көшіруге мүмкін болады. $z=x+iy$ шамасын комплекс айнымалы деп атайды. Мұндағы х пен y -нақты сандар, ал $i=\sqrt{-1}$-жорамал бірлік деп аталады.

Анықталу облысындағы әрбір z-мәніне белгілі бір анықталған w мәні сәйкес келсе, онда w айнымалысын комплекс айнымалы z-тің функциясы деп атайды. Оны былай белгілейді: $\omega = f(z)$.

Комплекс айнымалы функциялар теориясында элементар функцияларды қатарлар жәрдемімен көрсетеді. Егер $z = x + iy$ болса, онда sinz функциясы

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!^2}z^5 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \ldots$$

түрінде анықталады. Дәл осы сияқты:

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!^2}z^4 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \ldots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$$

Мысал үшін, $f(z) = e^{zi}$ функциясын қатарға жіктейік.

Сонда $e^{zi} = 1 + zi + \frac{1}{2!}(zi)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(zi)^n + \ldots$

Ал, $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$ болатынын ескерсек.

$$e^{zi} = \left(1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4}z^4 + \ldots\right) + i\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \ldots\right).$$

Мұндағы жақша ішіндегі өрнектер сәйкес cosx және sinx функцияларының жіктеулері болғандықтан

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z \qquad (6.23).$$

Дәл осы сияқты

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z \ . \qquad (6.24)$$

Ал $\begin{cases} e^{zi} = \cos z + i \sin z \\ e^{-zi} = \cos z - i \sin z \end{cases}$ жүйесін шешу арқылы табамыз:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \qquad (6.25) \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \qquad (6.26)$$

(6.23), (6.24), (6.25) және (6.26) формулаларын Эйлер формулалары

деп атайды.

Бақылау сұрақтары

1. Дәрежелік қатарлар функциялардың мәндерін жуықтап есептеуде қалай қолданылады?
2. Дәрежелік қатарлардың көмегімен анықталған интегралдарды жуықтап есептеу қалай жүзеге асырылады?
3. Жуықтап есептеу кезінде жіберілетін қателік қалай бағаланады?
4. Эйлер формулалары қалай тұжырымдалады және олардың математикалық мағынасы қандай?
5. Эйлер формулалары арқылы синус пен косинус функциялары қалай өрнектеледі?