21-22 дәріс. Кейбір элементар функцияларды Тейлор қатарына жіктеу. $f(x)=e^x$ **функциясын дәрежелік қатарға жіктеу.** $f(x)=\sin x$ **функциясын дәрежелік қатарға жіктеу.** $f(x)=\cos x$ **функциясын дәрежелік қатарға жіктеу. Биномдық қатар.** $f(x)=\ln(1+x)$ **және** $f(x)=arctgx$ **функцияларын дәрежелік қатарларға жіктеу.**

Дәріс жоспары

1. Элементар функцияларды Тейлор және Маклорен қатарларына жіктеудің негізгі әдістері.
2. Көрсеткіштік және тригонометриялық функцияларды дәрежелік қатарларға жіктеу.
3. Биномдық қатар және оның жинақталу шарттары.
4. Логарифмдік және кері тригонометриялық функцияларды дәрежелік қатарларға жіктеу.

2. Кейбір элементар функцияларды Тейлор қатарына жіктеу.

Кейбір элементарлық функцияларды дәрежелік қатарларға жіктейік.

а) $f(x)=e^x$ **функциясын дәрежелік қатарға жіктеу.** Функцияның туындыларын анықтайық:

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ldots,\ f^{(n)}(x)=e^x,\ldots$$

Ал, $x=0$ болғанда, $f(0)=1,\ f'(0)=1,\ldots f^{(n)}(0)=1,\ldots.$

Сонда $f(x)=e^x$ функциясы үшін Маклорен қатары былай жазылады:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (6.11)$$

Бұл қатардың жинақтылық облысын анықтайық. Даламбер белгісін пайдалансақ:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Сондықтан, бұл қатар сандық түзудің барлық нүктелерінде жинақты.

Ал, бұл қатар қосындысы e^x функциясына тең болатынын көрсету үшін кез келген x нүктесінде $n\to\infty$-да $R_n(x)\to\infty$ екенін дәлелдесек болғаны. Маклорен қатарының қалдық мүшесін жазайық. Сонда $f^{(n+1)}(c)=e^c$ болғандықтан (6.9) формулаға сәйкес $R_n(x)$ мынадай түрде жазылады:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

мұндағы c саны 0 мен x-тің арасында жатады. e^x функциясы біркелкі үдейді, сондықтан $c < |x|$ болғанда $e^c < e^{|x|}$ болады. Сонымен,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad (6.12)$$

Бұл теңсіздікті, жалпы мүшесі $\frac{|x|^n}{n!}$ болатын қатардың сандық түзудің барлық нүктелерінде жинақты екенін көрсетеді. Сондықтан жинақты болудың қажетті белгісі бойынша кез келген x үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$.Сонымен бірге, $n \to \infty$-да $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ шамасы да нөлге ұмтылады. Сондықтан, (6.13) теңсіздігіне сәйкес x -тің кез келген мәнінде $R_n(x) \to 0$ және (6.12) қатардың қосындысы e^x функциясымен дәл келеді.

Демек, сандық өстің барлық нүктелерінде

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (6.13)$$

жіктелуі орын алады екен.

ә) $f(x) = \sin x$ **функциясын дәрежелік қатарға жіктеу.** Функциясының туындыларын анықтайық:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}),$$

- - - - - - - - - - - -

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

- - - - - - - - - - -

Ал $x = 0$ десек :

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{IV}(0) = 0,\ f^{V}(0) = 1,\ldots,$$

$$f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},\ f^{(2n)}(0) = 0,\ldots$$

(6.3) формуланы еске алсақ, $f(x)=\sin x$ функциясы үшін Маклорен формуласын аламыз:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Алынған қатардың сандық түзудің барлық нүктелерінде жинақты болатынын тексеруге болады. Оның

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\sin(c+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad (0<c<x)$$ қалдық

мүшесін зерттейік. Сонда $\left|f^{(n+1)}(c)\right|=\left|\sin(c+(n+1)\frac{\pi}{2}\right|\le 1$ болғандықтан

$\left|R_n(x)\right|\le\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.Ал $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ болатынын ескерсек, онда $n\to\infty$-де $R_n(x)\to 0.$ Сондықтан $\sin x$ функциясы үшін сандық түзудің барлық нүктелерінде

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (6.14)$$

жіктелуі орын алады.

б) $f(x)=\cos x$ **функциясын дәрежелік қатарға жіктеу.** Бұл функцияның дәрежелік қатарға жіктелуін $\sin x$ функциясының қатарға жіктелуі сияқты алуға болар еді. Бірақ, оны $\sin x$ функциясының жіктелуін мүшелеп дифференциалдау арқылы алу жеңілдеу болады:

$$(\sin x)'=(x)'-(\frac{x^3}{3!})'+(\frac{x^5}{5!})'+....(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!})'+\ldots+(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!})'+\ldots$$

$$\text{Демек,}\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots \qquad (6.15)$$

Бұл жіктелу сандық түзудің барлық нүктелерінде дұрыс.

в) Биномдық қатар. $f(x)=(1+x)^m$

(m-кез келген нөлге тең емес нақты сан) функциясын x-тің дәрежелері бойынша жіктейік.

Оны біртіндеп дифференциалдасақ:

$f'(x)=m(1+x)^{m-1},$

$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},$

$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

Ал $x = 0$ десек:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = m,\ f''(0) = m(m-1),\ f'''(0) = m(m-1)(m-2),\ldots$$

$$\ldots,\ f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1).$$

Алынған нәтижелерді (6.3) формулаға қойсақ $(1+x)^m$ функциясы үшін Маклорен формуласын аламыз:

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

Бұл қатарды биномдық қатар деп атайды, оның жинақтылық облысын көрсетейік. Даламбер белгісін пайдалансақ:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}:\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right|=1.$$

Демек, қатар (-1;1) аралығында жинақты болады екен. Бұл жағдайда $|x|<1$ үшін $n\to\infty$-да қатардың қалдық мүшесі $R_n(x)$-тің нөлге ұмтылатынын көрсетуге болады. Мұны дәлелдеудің күрделілігін ескеріп, оны бұл жерде келтірмедік.

Сонымен, (-1;1) аралығында $f(x)=(1+x)^m$ функциясы үшін

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (6.16)$$

жіктелуі орын алады.

Егер m-натурал сан болмаған жағдайда, $|x|>1$ болса, онда қатар жинақсыз болады. Аралықтың шеткі нүктелерінде қатардың жинақты немесе жинақсыз болуы m-нің нақтылы мәндеріне тәуелді болады. Егер m натурал сан болса, қатардың $n=m+1$ мүшесінен бастап барлық коэффициенттері нөлге тең болады да, Ньютон биномы деп аталатын көпмүшелікті аламыз.

д) $f(x)=\ln(1+x)$ және $f(x)=arctgx$ функцияларын дәрежелік қатарларға жіктеу. $f(x)=\cos x$ функциясын Маклорен қатарына жіктеуде дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдау қасиетін пайдаландық. Осы тәрізді дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдау қасиетін де қолдану мүмкін

болады. Осыған мысал ретінде, $\ln(1+x)$ және $arctgx$ функцияларын мүшелеп интегралдау жәрдемімен дәрежелік қатарларға жіктейік.

Ол үшін $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots$ қатарын қарастырайық. Бұл бірінші мүшесі 1-ге, ал еселігі х-ке тең болатын геометриялық прогрессия. Бұл қатар $|x|<1$ болғанда жинақты және оның қосындысы $\frac{1}{1-x}$ болады. Сондықтан

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad (6.17)$$

(6.17) теңдігі $f(x)=\frac{1}{1-x}$ функциясының дәрежелік қатарға жіктелуі болады.

Ал (6.17) теңдіктегі $x=-t$ десек, онда

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots$$

теңдігін аламыз және ол $|t|<1$ болғанда жинақты. Бұл дәрежелік қатарды 0-ден x-ке ($|x|<1$) дейін мүшелеп интегралдасақ:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^x=\ln(1+x)=\int_0^x(1-t+t^2-t^3+\ldots+(-1)^n t^n+\ldots)dt=$$

$$\int_0^x dt-\int_0^x tdt+\int_0^x t^2dt-\int_0^x t^3dt+\ldots+(-1)^n\int_0^x t^n dt+\ldots=t\Big|_0^x-\frac{t^2}{2}\Big|_0^x+\frac{t^3}{3}\Big|_0^x-\frac{t^4}{4}\Big|_0^x+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x+\ldots=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots \qquad (6.18)$$

Бұл (6.18) теңдік $\ln(1+x)$ функциясының дәрежелік қатарға жіктелісі. Ол $|x|<1$ болғанда дұрыс болады және теңдіктің $x=1$ болғанда да орындалатынын дәлелдеуге болады.

Шынында, $x=1$ болғанда (6.18) теңдіктің сол жағы $\ln 2,$ ал оң жағы Лейбниц белгісі бойынша жинақты

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (6.19)$$

қатары болады. Енді

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (6.20)$$

теңдігінің дұрыстығын көрсету ғана қалады. Ол үшін бір санын $(1+t)$-ға бөлгендегі бөлінді

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+...+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}$$

өрнегін 0-ден 1-ге дейінгі аралықта интегралдайық.

Сонда

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\Big|_0^1=\ln 2=\int_0^1(1-t+t^2-t^3+...+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t})dt=$$

$$\int_0^1 dt-\int_0^1 tdt+\int_0^1 t^2dt-\int_0^1 t^3dt+...+(-1)^{n-1}\int_0^1 t^{n-1}+dt+(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+$$

$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt$ болады. Сонымен

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt.$$

Бұл теңдіктегі алғашқы n қосылғыш (6.19) қатардың n -дербес қосындысы S_n. (6.20) өрнекті

$$\ln 2-S_n=(-1)^n\int_0^1\frac{t^ndt}{1+t} \qquad (6.21)$$

түрінде жазайық. Сонда $\frac{t^n}{1+t}\le t^n$ $(0\le t\le 1)$ болғандықтан

$$\left|(-1)^n\int_0^t\frac{t^ndt}{1+t}\right|=\int_0^1\frac{t^ndt}{1+t}\le\int_0^1 t^ndt=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

Ал $n\to\infty$ -да, бұдан шекке көшсек $\frac{1}{n+1}\to 0$.

Демек, (6.21) теңдігінің оң жағындағы интеграл $n\to-\infty$ -да нөлге ұмтылады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln 2$ болады. Бұл (6.20) теңдіктің дұрыстығын дәлелдейді.

Енді $arctgx$ функциясының жіктелуіне тоқталайық. (6.17)-дегі x-тің орнына $-t^2$ қойсақ және оны 0-ден x-ке дейін интегралдасақ:

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+... \qquad (6.22)$$

(6.21) теңдігі $|x|<1$ болғанда жинақты болатынын оңай көрсетуге болады. Сонымен бірге, бұл теңдік $x=\pm1$ болғанда да орындалатынын дәлелдеу қиын емес.

1-мысал. $f(x)=\sin\left(\frac{x^2}{3}\right)$ функциясын х-тің дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктеу керек.

Шешуі. $\frac{x^2}{3}=y$ деп алып, кестелік жіктеуді (7.14) пайдаланамыз. Сонда

$$\sin\frac{x^2}{3}=\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}y^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=$$

$$=\frac{x^2}{3}-\frac{x^6}{3!\cdot 3^3}+\frac{x^{10}}{5!\cdot 3^5}-\frac{x^{14}}{7!\cdot 3^7}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!\cdot 3^{2n-1}}+\ldots$$

$\sin y$ функциясын қатарға жіктеу у-тің барлық мәндері үшін орындалатындықтан, берілген функция да х-тің барлық мәндері үшін жіктеледі.

Бақылау сұрақтары

1. Элементар функцияларды Тейлор және Маклорен қатарларына жіктеу қалай жүзеге асырылады?
2. Көрсеткіштік және тригонометриялық функциялардың Маклорен қатарлары қалай жазылады?
3. Биномдық қатар дегеніміз не және оның жинақталу шарттары қандай?
4. Логарифмдік функцияны дәрежелік қатарға жіктеу үшін қандай формулалар қолданылады?
5. Кері тригонометриялық функцияларды дәрежелік қатарларға жіктеу қалай орындалады?