1-дәріс. Сандық қатарлардың негізгі анықтамалары
2-дәріс. Жинақты қатарлардың қасиеттері.

Дәріс жоспары:

1. Сандық қатар ұғымы, оның жалпы мүшесі және дербес қосындылары.
2. Сандық қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығы. Қатар қосындысының анықтамасы.
3. Жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері және оларға қолданылатын амалдар.
4. Сандық қатар жинақтылығының қажетті шарты және жинақты қатарлардың қалдық мүшесі.

1. Сандық қатарлардың негізгі анықтамалары

Сандардың мынандай шектеусіз тізбегі берілсін:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$$

Осы сандардан құрылған тізбектің мүшелерін «+» таңбасымен біріктіргенде шығатын өрнек

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1.1)$$

сандық қатар, ал $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n, \cdots$ сандары қатардың мүшелері, мәселен a_1-бірінші мүшесі, a_2-екінші мүшесі, a_n- n-ші мүшесі немесе **жалпы мүшесі** деп аталады. (1.1) орнына, қосынды таңбасын пайдаланып, көбінесе былай жазады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n ;$$

n мұнда 1-ден ∞-ке дейінгі барлық мәндерді қабылдайды. Қатардың мүшелерінің нумерациясын кейде бірден бастамай, нольден не бірден үлкен кез кезген натурал саннан бастаған қолайлырақ болады. Қатар мүшесінің белгілі n нөмері бойынша, бұл мүшені жазу ережесі белгілі болса, яғни $a_n = f(n)$ болса онда қатарды берілген дейді.

Бірнеше мысалдар келтірейік:

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots,$

қатарының жалпы мүшесі $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;

2) $2+6+18+\cdots+2\cdot 3^{n-1}+\cdots,$

қатарының жалпы мүшесі $a_n = 2\cdot 3^{n-1}$;

3) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots,$

қатарының жалпы мүшесі $a_n = (-1)^{n-1}$;

4) $\sin\dfrac{\pi}{1}+\sin\dfrac{\pi}{2}+\cdots+\sin\dfrac{\pi}{n}+\cdots$

қатарының жалпы мүшесі $a_n = \sin\dfrac{\pi}{n}$ болады.

Қатардың мүшелерін өз ара біртіндеп қосып (шектеусіз көп) қосындылар құралық:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \cdots$$

бұларды қатардың дербес қосындылары деп атайды. Дербес қосындылар n нөмірі өскенде артады. Сонымен, қатардың дербес қосындылары біркелкі үдемелі сандық тізбекті $S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \cdots$ түзеді.

Қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысын қатардың n-ші дербес қосындысы дейді. Оны былай белгілейді:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ал, қатардың мүшелерінің саны шексіз болғандықтан, оның дербес қосындылары дербес қосындылардың шексіз тізбегін құрайды:

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots \qquad (1.2)$$

Дербес қосындылардың осы S_n тізбегін біз әрқашан (1.1) қатармен салыстырып отырамыз: (1.1) өрнектің негізгі ролі осы тізбекті тудыруында.

Қатар қосылғыштардың шексіз жиындарынан құрылатын болғандықтан, оларды тізбектей біртіндеп қосу арқылы қатар қосындысын анықтау мүмкін емес, өйткені оның мүшелерін түгел тауысу тіпті болмайтын іс.Сонымен, шексіз қатардың қосындысын өзімізге үйреншікті қосу амалын қолданып табу мүмкін емес. Сондықтан оның қосындысын табу үшін басқа амалды, атап айтқанда, шекке көшу амалын қолданамыз. Бұл амалды қолдану үшін (1.2) тізбекті құрамыз, сонан тіпті (1.2) тізбекті құрмай-ақ, қатардың S_n дербес қосындысын құрып, содан шекке көшсе де болады. Сондықтан, қатар қосындысының анықтамасын келтірейік. Егер S_n дербес қосындысындағы қосылғыштар санын арттырсақ, онда мынандай үш жағдайдың біріне тірелеміз:

1. Дербес қосынды S_n-нің қосылғыштары санын шектеусіз арттырғанда, ол белгілі бір шекке ұмтылады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ болады. Бұл жағдайда, қатарды жинақты деп, ал S санын оның қосындысы дейді де, оны былай жазады:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

2. Дербес қосындыдағы қосылғыштар саны шектеусіз артқанда $S_n \to +\infty$ немесе $S_n \to -\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$) болады. Бұл жағдайда, қатарды жинақсыз (шашыранды) дейді. Шашыранды қатардың қосындысы болмайды.

3. Дербес қосындыдағы қосылғыштар саны шектеусіз артқанда, дербес қосынды S_n ешқандай шекке ұмтылмайды. Бұл жағдайда да қатарды жинақсыз болады дейді және қатардың қосындысы болмайды.

Демек, мынандай анықтамаға келдік:

Егер сандық қатар (1.1) –дің дербес қосындысы S_n-нің $n \to \infty$-да ақырлы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ бар болса, ол **жинақты қатар**, ал S саны сол қатардың **қосындысы** деп аталады.

Егер $n \to \infty$-да, S_n-нің шегі ақырсыздыққа тең немесе шегі мүлдем жоқ болса , (1) –ді **жинақсыз қатар** деп атаймыз.

Мысал ретінде еселігі q-ға тең геометриялық прогрессияның мүшелерінен құрылған

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, a \neq 0 \qquad \text{(A)}$$

қатарды қарастырайық. Бұл қатардың дербес қосындысы $q \neq 1$ болғанда

$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{aq^n}{1-q}$ болады.

Бұдан:

1) егер $|q| < 1$ болса, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q},$

яғни қатар жинақты және оның қосындысы $S = \dfrac{a}{1-q}$ болады. Мысалы, $a = 1, q = \dfrac{1}{2}$ болғанда, қосынды

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2;$$

2) егер $|q| > 1$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \infty$, яғни қатар жинақсыз болады;

3) егер $q = 1$ болса, онда берілген қатар $a + a + a + \cdots + a + \cdots$ түріне келеді. Бұл жағдайда,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a + a + \cdots a) = \lim_{n\to\infty} a \cdot n = \infty,$$

яғни қатар жинақсыз болады;

4) егер $q = -1$ болса, онда берілген қатар $a - a + a - a + \cdots$ түріне келеді. Ол үшін дербес қосынды $S_n = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a(-1)^n}{2}$, яғни n жұп болса, $S_n = 0$, ал n-тақ болса, онда $S_n = a$ болады.

Сондықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі болмайды, яғни қатар жинақсыз болады. Сонымен, (А) қатары $|q| < 1$ болғанда жинақты, ал $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз болады екен.

1- мысал. Әрбір қатар үшін S_n дербес қосындысының формуласын жазу қажет; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегін немесе шектің жоқ екенін дәлелдеу қажет; қатардың жинақты, жинақсыздығын анықтау қажет:

а) $1+2+3+\ldots+n+\ldots$; **б)** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$

Шешуі. а) $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ қатарының мүшелері алғашқы мүшесі 1-ге тең және айырымы 1-ге тең арифметикалық прогрессияны беретіндіктен, арифметикалық прогрессияның алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы бойынша:

$$S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n$$

таба аламыз. Мұнан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n}{2}\cdot n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(n+n^2)=+\infty$. Демек, қатар жинақсыз. Осылайша, $S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=+\infty$; қатары жинақсыз.

б) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, болғандықтан,

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1+0+0+\ldots+0-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Мұнан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Яғни, қатар жинақты және оның қосындысы 1-ге тең.

Соңында: $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; қатары жинақты..

2-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \dots$.

қатарының жинақсыз болатынын дәлелдеу қажет.

Шешуі: Берілген қатардың жалпы мүшесін $\ln(1+\frac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$; түрінде таңдап аламыз.

$$a_1 = \ln 2 - \ln 1,$$
$$a_2 = \ln 3 - \ln 2,$$
$$a_3 = \ln 4 - \ln 3,$$
$$- - - - - - -$$
$$a_{n+1} = \ln n - \ln(n-1).$$
$$a_n = \ln(n+1) - \ln n,$$

Олай болса,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots +$$
$$+ (\ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ екені белгілі. Қатардың қосындысы жоқ және жинақсыз.

2. Жинақты қатарлардың қасиеттері

Сандық қатарлардың кейбір қарапайым қасиеттерін қарастырайық.

1-теорема. Егер

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \qquad (1.1)$$

қатары жинақты және қосынды S болса, онда

$$c_1 a_1 + c a_2 + c a_3 + \dots + c a_n + \dots \qquad (1.3)$$

(с-берілген сан) қатары да жинақты және оның қосындысы *cS* болады.

Дәлелдеу. Айталық (1.1) қатардың n-дербес қосындысы S_n, ал (1.3) қатардың n-дербес қосындысын σ_n дейік. Сонда

$$\sigma_{\text{n}} = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n\right) = cS_n.$$

болады. Бұдан $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} s_n = cS.$

Сонымен, (1.3) қатар жинақты және оның қосындысы cS болады екен.

2-теорема. Егер

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1.1)$$

және $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$ (1.4)

қатарлары жинақты және олардың қосындылары сәйкес S және s болса, онда

$$\left(a_1 + b_1\right) + \left(a_2 + b_2\right) + \cdots + \left(a_n + b_n\right) + \cdots \qquad (1.5)$$

қатары да жинақты және оның қосындысы S + s болады.

Дәлелдеуі: (1.1),(1.4) және (1.5) қатарларының дербес қосындыларын сәйкес s_n, S_n және σ_n деп белгілейік. Сонда

$$\sigma_n = \left(a_1 + b_1\right) + \left(a_2 + b_2\right) + \left(a_3 + b_3\right) + \cdots + \left(a_n + b_n\right) = s_n + S_n.$$

Енді шекке көшсек

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(s_n + S_n \right) = \lim_{n\to\infty} s_n + S_n = s + S.$$

болады. Сонымен, (1.5) қатары жинақты екен. (1.5) қатарын (1.1) мен (1.4) қатарларының қосындысы дейді.

Ескерту. Осы сияқты (1.1) және (1.4) қатарлары жинақты болғанда,

$$\sigma_n = \left(a_1 - b_1\right) + \left(a_2 - b_2\right) + \left(a_3 - b_3\right) + \cdots + \left(a_n - b_n\right) + \cdots \qquad (1.6)$$

қатары да жинақты және оның қосындысы S - S-ке тең болатынын дәлелдеуге болады. (1.6) қатарды (1.1) мен (1.4) қатарларының айырымы дейді.

Сонымен жинақты қатарды бір санға көбейтуге, шекті қосындылар тәрізді қатарларды мүшелеп қосуға және азайтуға болады екен.

АНЫҚТАМА. Егер (1.1) қатардың алдыңғы k мүшесін алып тастағанда шығатын қатар

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots \qquad (1.7)$$

(1.1) қатардың k-қалдық мүшесі деп аталады. Ол (1.1) қатардан, оның алғашқы k мүшелерін шығарып тастаудан алынады.

3-теорема. Егер қатар жинақты болса, онда оның кез келген қалдығы да жинақты болады. Егер қатардың қандай бір қалдығы жинақты болса, ол қатар да жинақты болады.

Дәлелдеу: Айталық $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты және қосындысы S яғни $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ болсын. Бұл қатардың шығарылып тасталған мүшелерінің қосындысын S_k, ал алғашқы $n-k$ мүшелерінің қосындысын σ_{n-k} дейік. Сонда

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}\ , \qquad (1.8)$$

мұндағы S_k саны n-ге тәуелді емес белгілі бір сан. (1.8) теңдігінен $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_k = S - S_k$, яғни (1.7) қатардың дербес қосындысының тізбегі $\{\sigma_{n-k}\}$-ның шегі бар болады. Сондықтан (1.7) қатары жинақты. Енді айталық (1.7) қатары жинақты және оның қосындысы σ болсын дейік, яғни $\lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = \sigma$ дейік. Сонда (1.8) - ден

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma.$$

Бұл (1.1) қатардың жинақты болатынын дәлелдейді.

Егер жинақты қатардың қалдығының қосындысын R_n арқылы белгілесек, онда $S=S_n+R_n$ бұдан $R_n = S - S_n$ болады.

4-теорема. Егер (1.1) қатар жинақты болса, онда $\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

Дәлелдеу.Қатар жинақталатын болғандықтан мына теңдік орындалады: $R_n = S - S_n$ және $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ болатыны айқын.

Ендеше $n \to \infty$-да

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Бақылау сұрақтары:

1. Сандық қатар дегеніміз не? Қатардың жалпы мүшесі және дербес қосындысы қалай анықталады?
2. Жинақты және жинақсыз сандық қатарлар деп қандай қатарларды айтады?
3. Жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері қандай?
4. Сандық қатардың жинақтылығының қажетті шарты қалай тұжырымдалады?
5. Жинақты қатардың қалдық мүшесі дегеніміз не және оның негізгі қасиеті қандай?