19- дәріс. Тейлор қатары.
20-дәріс. Маклорен қатары.

Дәріс жоспары:

1. Тейлор қатарының анықтамасы және функцияны Тейлор қатарына жіктеу.
2. Тейлор формуласы, оның қалдық мүшесі және қатардың жинақтылық шарттары.
3. Маклорен қатарының анықтамасы және оның Тейлор қатарымен байланысы.
4. Негізгі элементар функцияларды Маклорен қатарына жіктеу және олардың жинақталу облыстарын анықтау.

I. Тейлор қатары. Айталық $f(x)$ функциясы жинақтылық аралығы $(x_0 - R; x_0 + R)$ болатын

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (6.1)$$

дәрежелік қатарының қосындысы болсын.

Бұл жағдайда, $f(x)$ функциясы $x = x_0$ нүктесінің төңірегінде дәрежелік қатарға жіктеледі немесе $(x - x_0)$-дің дәрежелері бойынша жіктеледі дейді. Енді $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ коэффициенттерін анықтайық.

Бізге, дәрежелік қатарды жинақтылық аралығында мүшелеп дифференциалдауға болатыны және нәтижесінде алынатын қатардың жинақтылық аралығы сол $(x_0 - R; x_0 + R)$ аралығы болатыны белгілі. (6.1) теңбе-теңдікті біртіндеп дифференциалдасақ, жинақтылық аралығында жататын кез келген x үшін дұрыс болатын теңбе-теңдікті аламыз. Демек,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \ldots,$$

болғандықтан мұны біртіндеп дифференциалдасақ:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ na_n(x - x_0)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n + \ldots,$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + (n+1)na_{n+1}(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} +$$
$$+ (n+1)n(n-1)a_{n+1}(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 3 \cdot 2a_{n+1}(x - x_0) + \ldots$$

Бұл өрнектердегі $x = x_0$ десек,

$$f(x_0)=a_0,\ f'(x_0)=a_1,\ f''(x_0)=2a_2,\ f'''(x_0)=2\cdot 3a_3,\ldots,\ f^{(n)}(x_0)=$$
$$=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2a_{n,\ldots}$$

теңдіктерін аламыз. Бұдан

$$a_0=f(x_0), a_1=f(x_0), a_2=\frac{f''(x_0)}{2},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots n},\ldots$$

Анықталған коэффициенттердің мәндерін (6.1) теңдігіне қойсақ,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$$
$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

қатарын аламыз.

Демек, $f(x)$ функциясы $(x-x_0)$-дің дәрежелері бойынша дәрежелік қатарға жіктелсе, ол қатар

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (6.2)$$

түрінде жазылады екен. Алынған қатарды $f(x)$ функциясы үшін **Тейлор қатары** деп атайды.

Дербес жағдайда, $x_0=0$ болғанда (6.2) қатары мына түрге келеді:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (6.3)$$

Бұл қатар $f(x)$ функциясы үшін **Маклорен қатары** деп аталады.

Сонымен, $f(x)$ функциясы $x-x_0$ өрнегінің дәрежелері бойынша қатарға жіктелсе, бұл қатарды Тейлор қатары (егер $x_0=0$ болса, Маклорен қатары) дейді екен.

Бұдан, егер функция $x-x_0$ өрнегі бойынша дәрежелік қатарға жіктелсе, онда ол функция $x_0=0$ нүктесінде барлық ретті жоғары туындылары бар немесе x_0 нүктесінде шексіз дифференциалданады дейді.

Енді кері есепті қарастырайық. Айталық $x_0=0$ нүктесінде шексіз дифференциалданатын $f(x)$ функциясы берілсін. Ол үшін кез келген Тейлор қатарын құрайық:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

мынадай сұрақ қояйық: $f(x)$ функциясы үшін құрылған бұл қатардың қосындысы осы функцияға тең бола ма? Құрылған Тейлор қатары, барлық уақытта $f(x)$ функциясына жинақты бола бермейтіні практикада белгілі.

Мысал. $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ егер болса

өрнегімен берілген функцияны қарастырайық. Бұл функция үшін $x=0$ нүктедегі барлық ретті туындылар бар екенін көрсету оңай. Олар

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

Сондықтан, бұл функцияның Маклорен қатары

$$0+\frac{0}{1!}+\frac{0}{2!}x^2+\ldots+\frac{0}{n!}x^n+\ldots$$

түрінде жазылады. Оның қосындысы $S(x)$ десек, ол 0-ге теңбе-тең болады. Демек, бұл қосынды берілген функциямен дәл келмейді.

Енді қандай шарттар орындалғанда, берілген функция үшін құрылған Тейлор қатарының қосындысы $f(x)$ функциясымен дәл келетінін көрсетейік. Тейлор қатарының n-дербес қосындысын жазайық:

$$S_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Бұл дербес қосындыны n-дәрежелі Тейлор көпмүшелігі деп атайды. Енді $f(x)$ функциясы мен n-дәрежелі Тейлор көпмүшелігінің айырымын қарастырайық. Бұл айырымды Тейлор қатарының қалдық мүшесі деп атайды. Оны былай белгілейді: $R_n(x)$. Сонымен,

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x). \qquad (6.4)$$

Теорема. $x=x_0$ нүктесінде шексіз дифференциалданатын $f(x)$ функциясы үшін құрылған Тейлор қатары, бұл функцияға жинақты болуының қажетті және жеткілікті шарты $n\to\infty$ –да қалдық мүшесі $R_n(x)\to 0$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ теңдігінің орындалуы болады.

Дәлелдеу. ***Қажеттілігі.*** Айталық $f(x)$ функциясы Тейлор қатарының қосындысы, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$ болсын. Сонда (6.4) формуладан

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\big(f(x)-S_n(x)\big)=\lim_{n\to\infty}f(x)-\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)-f(x)=0$$

немесе $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Жеткіліктілігі.Айталық $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ болсын. Сонда (6.4) формуладан

$\lim\limits_{n\to\infty}\big[f(x)-S_n(x)\big]=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)-\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)-f(x)=0$ яғни $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)$. Бұдан $f(x)$ функциясы қатар қосындысы болатыны шығады.

Бұл теорема, функцияны Тейлор қатарына жіктеу туралы мәселені қарастырғанда, оның қалдық мүшесі $R_n(x)$-тің $n \to \infty$-дағы тәртібін зерттеу керек екенін көрсетеді. Егер берілген $x = x_0$ мәнінде $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_0) = 0$ болса, онда Тейлор қатарының қосындысы $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесіндегі мәніне тең, яғни $f(x_0)$ мәніне тең болады. Егер $n \to \infty$-да $R_n(x_0)$ нөлге ұмтылмайтын болса, онда Тейлор қатары жинақсыз, не оның x_0 нүктесіндегі қосындысы функцияның берілген x_0 нүктедегі мәнімен дәл келмейді.

Енді қалдық мүше қандай түрде берілуі мүмкін екеніне тоқталайық. (6.4) формуладан $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$. Соңғы өрнекке $S_n(x)$ дербес қосындысының өрнегін қойсақ, онда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q \qquad (6.5)$$

(6.5) қалдық мүшені мынадай түрде іздейік:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q \qquad (6.6)$$

мұндағы Q шамасын анықтау керек болады.

Сонда (6.5) формуланы басқаша жазуға болады.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q \qquad (6.7)$$

x-ті белгілеп алайық. Сонда Q белгілі бір сан мәнін қабылдайды. Q-ді анықтау үшін көмекші функция құрайық:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n -$$

$$- \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

Мұндағы $t = x$ десек, $F(x) = 0$ болатыны көрінеді (6.7) теңдікті еске алсақ. $F(x_0) = 0$ болатындықтан $F(x)$ функциясынан t айнымалысы бойынша туындыны анықтасақ (мұнда х-ті тұрақты деп қарастырамыз) онда

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t) + \frac{2f''(t)}{2!}(x - t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2 + \frac{3f'''(t)}{3!}(x$$

$$(x-t)^3+\ldots+\frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^n(n+1)}{(n+1)!}Q,$$

ықшамдаған соң $F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^n}{n!}Q$. Демек, $F(x)$ функциясы $[x_0;x]$ кесіндісінде дифференциалданады және кесіндінің шеткі нүктелерінде нөлге айналады. Сондықтан ол Ролль теоремасының шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан x_0 мен х-тің арасында жататын $t=c$ мәнінде $F'(t)$ туындысы нөлге тең, яғни $F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{(x-c)^n}{n!}Q=0$ болады.

Бұдан Q-ді анықтайық: $Q=f^{(n+1)}(c)$. Мұны (6.6) теңдігіне қойсақ

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad (6.8)$$

мұнда $x_0<c<x$ (6.8) түрдегі қалдық мүшенің өрнегін Лагранж түріндегі қалдық мүше дейді. Дербес жағдайда, $x=x_0$ болғанда Маклорен қатарының қалдық мүшесі өрнегін аламыз:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<c<x). \qquad (6.9)$$

Келтірілген қосымша мүшенің түрлері $n\to\infty$-дағы оның тәртібін зерттеуді жеңілдетеді.

(6.7) қатысын және (6.8) өрнегін еске алсақ қалдық мүше үшін

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (x_0<c<x) \qquad (6.10)$$

(6.10) формуласын Тейлор формуласы, ал оның $x_0=0$ болғандағы дербес жағдайы

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

мұндағы $(0<c<x)$ (6.11) Маклорен формуласы деп аталады.

Бақылау сұрақтары:

1. Тейлор қатары дегеніміз не және оның жалпы түрі қалай жазылады?

2. Тейлор формуласының қалдық мүшесі дегеніміз не және оның нөлге ұмтылуы қандай рөл атқарады?
3. Маклорен қатары дегеніміз не және оның Тейлор қатарынан айырмашылығы қандай?
4. Негізгі элементар функциялардың Маклорен қатарлары қалай қорытылады?
5. Функцияның Тейлор немесе Маклорен қатарына жіктелу шарттары қандай және алынған қатардың жинақталу облысы қалай анықталады?