17 дәріс. Дәрежелік қатар ұғымы. Жинақтылық радиусы. Абель теоремасы.
18 дәріс. Дәрежелік қатарлардың қасиеттері.

Дәріс жоспары:

1. Дәрежелік қатар ұғымы, оның жалпы түрі және жинақталу облысы.
2. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы мен жинақталу интервалы. Жинақтылық радиусын анықтау тәсілдері.
3. Абель теоремасы, оның тұжырымдалуы және дәлелдемесі.
4. Дәрежелік қатарлардың негізгі қасиеттері. Дәрежелік қатарларды мүшелеп дифференциалдау және интегралдау.

I. Дәрежелік қатар ұғымы. Жинақтылық радиусы. Абель теоремасы.Функциялық қатарлардың көп қолданатын дербес жағдайы дәрежелік қатарлар болады.

Анықтама. Функциялық қатардың төмендегі дербес түрі

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad (5.1)$$

(мұндағы x_0 мен $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ коэффициенттері –тұрақтылар) дәрежелік қатар деп аталады. Дербес жағдайда, $x_0 = 0$ болғанда қатар мына түрге келеді:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (5.2)$$

Айта кететін нәрсе: дәрежелік қатарда санау нөлден басталады. Алғашқы мүшесін нөлінші, одан кейінгі мүшені бірінші мүше т.с. деп саналады. Шынында, a_0 коэффициенті $(x-x_0)^0 = 1$ көпмүшесіне көбейтіліп тұр, ал бірінші мүше, a_1-дің $(x-x_0)$-ге көбейтіндісі. Осылай кете берсек, n-мүше a_n мен $(x-x_0)^n$ көпмүшеліктің көбейтіндісі болады.

Егер (5.1) қатары $x = x_1$ нүктеде жинақты болса, онда берілген дәрежелік қатар x_1 нүктесінде жинақты болады деп атайды. (5.1) дәрежелік қатардың жинақты болатын барлық x нүктелерінің жиынын, қатардың **жинақтылық облысы** дейді. Кез келген дәрежелік қатар $x = x_0$ нүктесінде жинақты. Сондықтан, дәрежелік қатардың жинақтылық облысы кем дегенде, бір нүктені қамтиды. Алдағы уақытта, дәрежелік қатардың жинақтылық облысының түрі туралы мәліметті Н.Абельдің мына теоремасынан алуға болады.

I–теорема (Абель теоремасы). Егер дәрежелік қатар (5.1) $x_1 \neq x_0$ нүктесінде жинақты болса, онда ол $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x нүктесінде абсолютті жинақты болады. Егер

(5.1) қатары x_1 нүктесінде жинақсыз болса, онда ол $|x-x_0|>|x_1-x_0|$ болатын кез келген x нүктесінде жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. Айталық $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сан қатары жинақты болсын.

Сонда қатардың жинақталуының қажетті шарты бойынша

$\lim_{n\to\infty} a_n(x_1-x_0)^n=0$ болады.Олай болса,барлық n үшін

$|a_n(x_1-x_0)^n|\le M$ теңсіздігі орындалатын M саны табылады. Демек, егер

$|x-x_0|<|x_1-x_0|,$ болса, онда

$|a_n(x-x_0)^n|=|a_n(x_1-x_0)^n|\cdot(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|})^n\le Mq^n,$ теңсіздігі орындалады.

Мұндағы $q=\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}<1.$

Енді геометриялық прогрессиямен салыстырайық. Сонда $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x нүктеде қатар жинақты.

Айталық $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ қатары жинақсыз болсын. Сонда (5.1) қатары $|x-x_0|>|x_1-x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын кез келген x нүктесінде жинақсыз. Шынында , ол қатар x нүктесінде жинақты деп ұйғарсақ, онда дәлелдегенімізге сәйкес x_1 нүктесінде де жинақты болады. Бұл қатардың нүктелерде жинақсыз болатынына қайшы. Бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

Абель теоремасын пайдаланып, (5.1) дәрежелік қатары үшін мынадай үш жағдайды тағайындауға болады:

1) (5.1) қатар тек x_0 нүктесінде жинақты;

2) (5.1) қатар барлық $x\in R$ нүктелерде жинақты ;

3) (5.1) қатары $(x_0-R;x_0+R)$ аралығынан алынған барлық x үшін жинақты, ал $|x_0-x_0|>R$ теңсіздігін қанғаттандыратын барлық x үшін жинақсыз болатындай $R>0$ саны бар болады.

Анықтама. (5.1) қатары $|x-x_0|<R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін жинақты болатын,ал $|x-x_0|>R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін жинақсыз болатын $R>0$ саны бар болса, оны қатардың **жинақтылық радиусы** деп, ал $(x_0-R;x_0+R)$ аралығын қатардың **жинақтылық интервалы (аралығы)** деп атайды.

Егер (5.1) қатары тек x_0 нүктесінде жинақты болса, онда $R = 0$ болады. Егер (5.1) қатары кез келген x нүктеде жинақты болса, онда $R = \pm\infty$ болады.

Енді дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын анықтау тәсіліне келейік.

2-теорема. Егер (5.1) дәрежелік қатардың $\left\{\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right\}$ тізбегінің шектеулі немесе шектеусіз шегі бар болса, онда жинақтылық радиусы

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R \qquad (5.3)$$

формуласымен анықталады.

Дәлелдеу: Айталық $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = A$ болсын. Алдымен, $0 < A < +\infty$ жағдайын қарастырайық. Кез келген $x_1 \neq x_0$ санын таңдап алайық және $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\|x - x_0|^n$ сан қатарына Даламбер белгісін қолданайық. Сонда $u_n = |a_n|\|x_1 - x_0|^n$ және $u_{n+1} = |a_{n+1}|\|x_1 - x_0|^{n+1}$ болғандықтан,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\|x_1 - x_0|^{n+1}}{|a_n|\|x_1 - x_0|^n} = |x_1 - x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x_1 - x_0|\cdot\frac{1}{A}$$

Даламбер белгісіне сәйкес, егер $\dfrac{1}{A}|x_1 - x_0| < 1,$ болса, қатар абсолютті жинақты болады: ал $|x_1 - x_0| > A$ болса, қатар жинақсыз болады. Демек, $A = R$

Егер $A = +\infty$ болса кез келген $x_1 \neq x_0$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$ болады. Демек, кез келген x үшін қатар жинақты, яғни $R = +\infty$ болады. Егер $A = 0$ болса, онда кез келген $x_1 \neq x_0$ үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty < 1$ яғни қатар кез келген $x_1 \neq x_0$ үшін жинақсыз болады. Бұл жағдайда $R = 0$ болады.

3–теорема. Айталық $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ тізбегінің шектеулі шегі бар немесе шексіз шегі болсын. Сонда қатардың жинақтылық радиусы

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (5.4)$$

формуласымен анықталады.

Егер $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ қатарына x-тің тек қана жұп немесе тақ дәрежелері енетін болса, онда қатардың жинақтылық радиусын табу үшін Коши не Даламбер белгісін қолдану керек.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ қатарының жинақтылық аралығы центрі x_0 нүктесінде жататын $]x_0 - R, x_0 + R[$ аралығы болады.

2. Дәрежелік қатарлардың қасиеттері.

Айталық $f(x)$ функциясы

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (5.5)$$

қатарының қосындысы және $(-R; R)$ жинақтылық аралығы болсын.

Бұл жағдайда, $f(x)$ функциясын $(-R; R)$ аралығында дәрежелік қатарға жіктеледі немесе x-тің дәрежелері бойынша қатарға жіктеледі деп айтады.Енді дәрежелік қатардың қасиеттері туралы екі теореманы дәлелдеусіз келтірейік.

4 - теорема. Егер $f(x)$ функциясы $(-R; R)$ аралығында (5.5) түрдегі дәрежелік қатарға жіктелсе, онда қатар бұл аралықта дифференциалданады және оның туындысы (5.5) қатарды мүшелеп дифференциалдау арқылы алынуы мүмкін, яғни $f'(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)' =$

$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$, болады.

Осы тәрізді $f(x)$ функциясының кез келген ретті туындысын алуға болады. Бұл жағдайда, алынған қатарлардың жинақтылық радиусы бастапқы қатардың жинақтылық радиусына тең болады.

5 - теорема. Егер $f(x)$ функциясы $(-R; R)$ аралығында дәрежелік қатарға жіктелетін болса, онда функция бұл аралықта интегралданады және функция интегралын (5.5) қатарын мүшелеп интегралдау арқылы алу мүмкін болады, яғни $x_1, x_2 \in (-R; R)$ болса, онда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} a_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} a_1 x dx + \int_{x_1}^{x_2} a_2 x^2 dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx + \ldots$$

Ал, $|x| < R$ болғанда (5.5) қатарды $[0; x]$ кесіндісінде интегралдаудың нәтижесінде жаңа

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

қатар алынады. Бұл қатардың жинақтылық аралығы да $(-R;R)$ аралығы болады. Қатарларды дифференциалдау мен интегралдау қатарларды зерттеуде жиі қолданылады.

I –мысал. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ қатарының жинақтылық облысын көрсетейік.

Шешуі: Мұнда $a_n=\frac{1}{1+n^2}$ және $a_{n+1}=\frac{1}{1+(n+1)^2}$.

Сонда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+n^2}:\frac{1}{1+(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+1)^2}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

Сондықтан, қатар (-1;1) аралығында жинақты болады. Сонымен бірге $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ сан қатары жинақты болғандықтан, берілген қатар $x=\pm1$ нүктелерінде де абсолютті жинақты болады. Соңында берілген қатар $[-1;1]$ кесіндіде абсолютті жинақты, ал барлық $|x|>1$ теңсіздігін қанағаттандыратын нүктелер үшін жинақсыз болатынын аламыз.

Бақылау сұрақтары:

1. Дәрежелік қатар дегеніміз не және оның жалпы түрі қалай жазылады?
2. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы мен жинақталу интервалы қалай анықталады?
3. Абель теоремасы қалай тұжырымдалады және оның математикалық мағынасы қандай?
4. Дәрежелік қатарлардың негізгі қасиеттері қандай?
5. Дәрежелік қатарларды мүшелеп дифференциалдау және интегралдау қандай шарттарда орындалады?