15-дәріс. Бірқалыпты (дұрыс) жинақтылық

16-дәріс. Бірқалыпты жинақты қатарлардың қасиеттері

Дәріс жоспары:

1. Функциялық қатарлардың бірқалыпты (дұрыс) жинақтылығы ұғымы және оның анықтамасы.
2. Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарттары.
3. Бірқалыпты жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері. Қосынды функцияның үзіліссіздігі.
4. Бірқалыпты жинақты функциялық қатарларды мүшелеп интегралдау және дифференциалдау шарттары.

1. Бірқалыпты (дұрыс) жинақтылық

А н ы қ т а м а . Егер функциялық $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (4.1) қатарға алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін тек сол $\varepsilon > 0$ санынан ғана тәуелді, $x \in D$ шамасына тәуелсіз $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық нөмірлер $n > N$ мен $x \in D$-тің барлық мәндері үшін теңсіздік $\left|S(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$ немесе $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, (4.1) қатар D жиынында $S(x)$ функциясына **бірқалыпты жинақты** болады деп аталады.

Бірқалыпты жинақтылық шарты (Коши критерийі).(4.1) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болуы үшін алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ санынан ғана тәуелді, $x \in D$-ке тәуелсіз $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n > N$ мен кез келген натурал p саны үшін

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

теңсіздіктің D жиынының барлық x-терінде бірдей орындалуы қажетті және жеткілікті.

Енді, қатарлардың бір қалыпты жинақтылығын анықтау үшін қолданылатын қарапайым жеткілікті белгіні қарастыралық.

Вейерштрасс белгісі. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функциялық қатардың мүшелері

D жиынында

$$|u_n(x)| \le a_n \qquad (n=1,2,3,...)$$

теңсіздіктерін қанағаттандырса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатары D жиынында абсолют және бір қалыпты жинақты болады. Мұндағы a_n-дер кейбір жинақты $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сандық қатардың мүшелері.

Дәлелдеу. Әуелі $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатардың қалдығын құрамыз:

$$r_p = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} + ...$$

Теореманың шарты бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатар жинақталатын болғандықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес N номері табылып, барлық $n > N$ нөмірлері үшін $r_p < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Дәлелдемек теореманың шарты бойынша $|u_n(x)| \le a_n$ теңсіздігі орындалуы міндетті.

Бұл теңсіздік салыстыру белгісі бойынша $|u_1(x)| + |u_2(x)| + ... + |u_n(x)| + ...$ қатарының жинақталатынын көрсетеді. Сондықтан $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функциялық қатары D жиынында абсолют жинақталады.

Енді $|u_n(x)| \le a_n$ теңсіздігін ескерсек, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатардың қалдығы үшін

$$|R_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ...| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + ...$$
$$\le a_{n+1} + a_{n+2} + ... + = r_n$$

яғни, $|R_n(x)| \le r_n < \varepsilon$ болады. Бұл теңсіздік $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функциялық қатардың D жиынында бір қалыпты жинақталатынын дәлелдейді.

А н ы қ т а м а . Егер функциялық $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (4.1) қатар үшін мүшелері оң жинақты сандық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (4.4) табылып, кез келген $x \in D$ және $\forall n$ үшін белгілі бір $n > N$-нен бастап $|u_n(x)| \le a_n$ теңсіздігі орындалса, онда (4.1) қатар (4.4) жинақты қатармен **мажоранттанады** деп аталады. Бұл жағдайда, (4.4) қатар функциялық (4.1) қатарды мажорлаушы қатар немесе **мажоранттық қатар** деп атайды.

2. Бірқалыпты жинақты қатарлардың қасиеттері

Теорема (қатардың қосындысының үзіліссіздігі туралы). Егер функциялық $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатардың мүшелері $u_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ D жиынында үзіліссіз және ол қатар сол жиында $S(x)$ функциясына бір қалыпты жинақты болса, онда қатардың қосындысы $S(x)$ D жиынында үзіліссіз функция болады.

Теорема (қатарды мүшелеп интегралдау туралы). Егер функциялық $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатардың әрбір мүшесі $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және бұл қатар сол $[a,b]$ кесіндісінде $S(x)$ функциясына бір қалыпты жинақты болса, онда қатарды кез келген $[x_0, x] \in [a,b]$ кесінді бойынша мүшелеп интегралдауға болады

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt.$$

Теорема (қатарды мүшелеп дифференциалдау туралы). Егер функциялық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $[a,b]$ кесіндісінде мына шарттарды қанағаттандырса:

1) қатар $S(x)$ функциясына жинақты болса;

2) туындылар $u_1'(x),\ u_2'(x),...,u_n'(x),...$ үзіліссіз функциялар болса;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ қатары бірқалыпты жинақты болса, онда (4.1) қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады және $S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ теңдігі орындалады.

1-мысал. Берілген функциялық $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^n}$, $[-1,4]$ қатардың мажоранттық қатарын тауып және берілген аралықта бірқалыпты (дұрыс) жинақтылығын көрсету керек:

Шешуі. Вейерштрасс белгісін пайдаланамыз. Кез келген $x \in [1,4]$ үшін $|x-3| \le 2$ орындалады. Демек

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(x-3)^n}{n^n}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}.$$

Ал сандық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ Коши белгісі бойынша

$$a_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

жинақты болады, сол себепті бұл қатар берілген функциялық қатарды мажорлаушы қатар болып табылады.

Ендеше, қарастырылып отырған қатар барлық $x \in [1,4]$ үшін абсолютті және бірқалыпты жинақты болады.

2-мысал. Функциялық қатар $x^2 + x^6 + \ldots + x^{4n-2} + \ldots$ кез келген $-1+\varepsilon \le x \le 1+\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$ интервалында бірқалыпты жинақталатынын көрсету және оның қосындысын табу керек.

Шешуі. Берілген қатардың мүшелері сан қатарының $q^2 + q^6 + \ldots + q^{4n-2} + \ldots$ мүшелерінен артық емес, ал $0 < q \le 1-\varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын q үшін бұл қатар абсолют жинақталады. Сондықтан Вейерштрасстың белгісі бойынша берілген қатар бірқалыпты жинақталады. Енді берілген қатардың қосындысын табамыз:

$$S(x) = x^2 + x^6 + x^{10} + \ldots + x^{4n-2} + \ldots = \frac{x^2}{1-x^4}.$$

Және қатар бірқалыпты жинақты, ендеше оны мүшелеп интегралдауға болады, онда

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots = \int_0^x \frac{t^2}{2-t^4}\,dt.$$

Енді интегралды табу керек. Сондықтан

$\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{2\left(1+t^2\right)}$, бұдан

$$\int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\ln|1+x| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}arctgx$$

сонымен, $-1 < x < 1$ болса,

$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{2}arctgx$ болды.

Бақылау сұрақтары:

1. Функциялық қатардың бірқалыпты (дұрыс) жинақтылығы дегеніміз не және ол қалай анықталады?
2. Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарттары қандай?
3. Бірқалыпты жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері қандай?
4. Бірқалыпты жинақты функциялық қатардың қосынды функциясының үзіліссіздігі туралы теорема қалай тұжырымдалады?
5. Функциялық қатарларды мүшелеп интегралдау және дифференциалдау қандай шарттар орындалғанда мүмкін болады?