13-дәріс. Функциялық қатарлардың негізгі ұғымдары

14-дәріс. Коши критерийі.

Дәріс жоспары:

1. Функциялық қатар ұғымы, оның жалпы мүшесі және дербес қосындылары.
2. Функциялық қатардың жинақталу облысы, жинақталу нүктесі және қосынды функциясы.
3. Функциялық қатарлардың нүктелік және бірқалыпты жинақтылығы.
4. Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақтылығының Коши критерийі және оның қолданылуы.

Осыған дейін біз мүшелері нақты сан болып келетін қатарларды қарастырдық. Енді біз мүшелері функция болып келетін қатарларды қарастырамыз.

1. Функциялық қатарлардың негізгі ұғымдары

А н ы қ т а м а . Егер D жиынында белгілі бір $u_n(x)\ \ (n=1,2,...)$ функциялары анықталған болса, онда сол жиында функциялық тізбек берілді деп есептелінеді және оны $\{\ u_n(x)\ \}$ немесе $u_1(x),u_2(x),u_3(x),...,u_n(x),...$ символымен белгілейді.

А н ы қ т а м а . Берілген функциялық тізбек $\{\ u_n(x)\ \}, x\in D$ үшін құрылған өрнек

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+....=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad x\in D \qquad (4.1)$$

функциялық қатар деп аталады.

$x_0\in D$ нүктесін алып, оны (4.1) функциялық қатардағы тәуелсіз айнымалы *x*-тің орнына апарып қойсақ

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+...+u_n(x_0)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0) \qquad (4.2)$$

сандық қатар аламыз.

А н ы қ т а м а . Егер (4.2) сандық қатар жинақты болса, онда (4.1) функциялық қатар $x_0\in D$ **нүктесінде жинақты болады, ал** x_0 нүктесі (4.1) қатардың **жинақталу нүктесі** деп аталады.

А н ы қ т а м а . Егер (4.1) қатар *D* жиынының әрбір нүктесінде жинақты болса, онда функциялық қатар *D* жиынында жинақты болады, ал *D* сол қатардың **жинақталу облысы** деп аталады.

А н ы қ т а м а . Егер *D* жиынында (4.1) қатардың мүшелерінің абсолютті шамаларынан құрылған қатар $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ жинақты болса, онда (4.1) қатар сол жиында абсолютті жинақты болады.

Егер (4.1) функциялық қатардың *D* жиынының әрбір нүктесінде айнымалы *x*-тің функциясы болатын $n-$ші дербес қосынды

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

$S(x)$-ге ұмтылса, яғни $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$ (4.3)

онда (4.1) қатар осы жиында жинақты деп, ал функция $S(x)$ - оның **қосындысы** деп аталады.

Сонымен бірге, $S(x) - S_n(x)$ айырымы функциялық (4.1) **қатардың қалдығы** деп аталып, $R_n(x)$ деп белгіленеді, яғни

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Егер (4.1) қатар *D* жиынының әрбір нүктесінде жинақты болса, оның қалдығы нольге ұмтылатыны айқын, яғни

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(S(x) - S_n(x)\right) = S(x) - \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) - S(x) = 0$$

Коши критерийі. (4.1) функциялық қатар жинақты болуы үшін алдын ала берілген кез келген $\varepsilon > 0$ саны мен кез келген $x \in D$ мәніне тәуелді бір $N = N(\varepsilon, x)$ нөмірі табылып, барлық нөмірлер $n > N$ мен кез келген натурал *p* саны үшін

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| = \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

(4.1) функциялық қатардың абсолютті жинақталу облысын анықтау үшін Даламбер белгісін $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\rho(x)\right)$ немесе Коши белгісін $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x)\right)$ пайдаланған жөн. Бұнда, (4.1) қатардың абсолютті жинақталу облысын анықтау үшін $\rho(x)<1$ функциялық теңсіздігін, ал жинақсыз болу облысын анықтау үшін $\rho(x)>1$ функциялық теңсіздігін шешу керек. $\rho(x)=1$ нүктелерде қатардың жинақтылығы жөніндегі мәселені жинақтылықтың басқа белгілерімен зерттеу керек.

1-мысал. $\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+\ldots$

функционалдық қатары берілген. Қатарды x=0 және x=1 нүктелерінде жинақтылыққа зерттеу қажет.

Шешуі. x=0 нүктесінде

$$2+\frac{1}{3}\cdot 2^2+\frac{1}{5}\cdot 2^3+\frac{1}{7}\cdot 2^4+\ldots$$

қатарын аламыз. Мұндағы

$$a_n=\frac{2^n}{2n-1},\ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{2n+1}.$$

Даламбер белгісін пайдаланып,

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=2\cdot 1=2>1$$

аламыз. Сонымен, қатар жинақсыз.

x=1 нүктесінде

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots$$

болады. Мұндағы

$$a_n = \frac{1}{3^n(2n-1)},\ a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(2n+1)}$$

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1$$

яғни қатар жинақты.

2-мысал. $-\frac{1-x}{1+x} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n + \ldots$ (A)

Функционалдық қатарының жинақталу облысын табу қажет.

Шешімі. Даламбер белгісін қолданамыз:

$$|u_n(x)| = \frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n; \qquad |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{2n+1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n+1} : \frac{1}{2n-1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n =$$

$$= \left|\frac{1-x}{1+x}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$ теңсіздігі x>0 болғанда орындалады. Осылайша, (A) қатары x>0 болғанда абсолютті жинақталады. x<0 болғанда $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1$ болады, сондықтан Даламбер белгісі бойынша қатар жинақсыз болады. Енді x=0 болғанда қатарды зерттеу қажет. x=0 мәнін (A) қатарына қойып, Лейбниц белгісі бойынша жинақталатын

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \ldots \qquad \text{(B)}$$

сандық қатарын аламыз.

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}$ қатары жинақсыз болғандықтан, (В) қатары шартты түрде жинақталады.

Сонымен, (А) қатарының жинақталу облысы $0 \le x < \infty$ жарты өсі болады және $0 < x < \infty$ ашық жарты өсінде ол қатар абсолютті жинақталады.

Бақылау сұрақтары:

1. Функциялық қатар дегеніміз не және оның сандық қатардан айырмашылығы қандай?
2. Функциялық қатардың жинақталу облысы мен қосынды функциясы қалай анықталады?
3. Функциялық қатардың нүктелік және бірқалыпты жинақтылығы дегеніміз не?
4. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығының Коши критерийі қалай тұжырымдалады?
5. Коши критерийі арқылы функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығы қалай зерттеледі?