11-дәріс. Абсолютті және шартты жинақты қатарлардың қасиеттері.
12-дәріс. Қатарлардың абсолют жинақталуының белгілері. Қатарларға амалдар қолдану

Дәріс жоспары:

1. Абсолютті және шартты жинақты қатарлар, олардың негізгі қасиеттері.
2. Абсолютті және шартты жинақтылықтың арасындағы байланыс. Қатар мүшелерінің орнын ауыстыру.
3. Қатарлардың абсолют жинақталуының белгілері және оларды қолдану.
4. Жинақты қатарларға амалдар қолдану: қатарларды қосу, азайту, санға көбейту және қатарлардың көбейтіндісі.

1. Абсолютті және шартты жинақты қатарлардың қасиеттері

Теорема. Егер кез келген екі сандық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ мен $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютті жинақты болса, онда берілген қатарлардың сәйкес мүшелерін қосу және алу амалымен құрылған қатар $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$- да абсолютті жинақты болады.

А н ы қ т а м а . $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ мен $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатарларының көбейтіндісі деп, мына қатарды айтамыз:

$$(u_1 \cdot v_1) + (u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1) + (u_1 \cdot v_3 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_1) + \ldots +$$
$$+ (u_1 \cdot v_n + u_2 \cdot v_{n-1} + \ldots + u_n \cdot v_1) + \ldots$$

Коши теоремасы. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатарлары абсолютті жинақты болса, онда олардың көбейтінділерінен құрылған қатар да абсолютті жинақты болады және оның қосындысы берілген қатарлардың қосындыларының көбейтіндісіне тең болады.

Дирихле теоремасы. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары абсолютті жинақты болса, онда оның мүшелерінің орындарын еркін ауыстырғаннан шыққан қатар жинақты және оның қосындысы өзгермейді. Басқаша айтқанда, абсолютті жинақты қатар үшін ауыстырымдылық заңы орындалады.

Риман теоремасы. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары шартты жинақты болса, онда оның мүшелерінің орындарын еркін ауыстыру жолымен:

1) қосындысы берілген кез келген А санына тең болатын жаңа қатар құруға болады;
2) жинақсыз жаңа қатар құруға болады.

Теорема. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары шартты жинақты болса, онда берілген қатардың тек қана оң мүшелерінен және тек қана теріс мүшелерінен құрылған қатарлар жинақсыз болады.

Ескерту. Қатарларды абсолютті және жай (шартты) жинақты деп ажыратудың принципті сипаты бар.

Абсолютті жинақты екі қатарды өзара алгебралық түрде қосуға, көбейтуге және бөлуге болады, әрі одан шыққан жаңа қатарлар да абсолютті жинақты болады да, олардың қосындылары сол екі қатардың қосындыларының қосындысына, көбейтіндісіне және бөліндісіне тең болады.

Ал шартты жинақты қатарларға бұл амалдарды қолдануға болмайды, өйткені нәтижесі мүлде дұрыс емес қорытынды беруі мүмкін.

2. Қатарлардың абсолют жинақталуының белгілері

Енді мүшелері оң қатарлардың жинақтылығы жөніндегі белгілерге ұқсас және мүшелері кез келген сан болатын қатарлардың жинақтылығын анықтауға қолданылатын жеткілікті белгілерге тоқталайық.

1-теорема.Мүшелері оң жинақталатын

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3.6)$$

және мүшелері кез келген сандар болатын

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (3.2)$$

қатарлары берілсін. Сонда қатарлардың барлық мүшелері үшін

$$|u_n| \le a_n, \ \text{n=1,2,3,…} \qquad (3.7)$$

шарты орындалса, (3.2) қатар абсолют жинақталады. Сонымен бірге (3.2) және (3.6) қатарлардың сәйкес қосындылары S пен σ үшін $|S| < \sigma$ теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. Дәлелдемек болып отырған белгінің шарты бойынша (3.7) арақатыстар орындалатын болғандықтан, мүшелері оң қатарларды салыстыру белгісі бойынша (3.6) қатардың жинақталатынынан

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + ... + |u_n| + ...$$

қатарының да жинақталатыны шығады. Ендеше, (3.2) қатар абсолют жинақталады.

Егер дербес

$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \text{ мен } \sigma_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

қосындысын құрсақ, (3.7) шарт бойынша

$$|s_n| = |u_1 + u_2 + ... + u_n| \le |u_1| + |u_2| + ... + |u_n| \le a_1 + a_2 + ... + a_n = \sigma_n,$$

яғни барлық $n = 1,2,3,...,$ үшін $|s_n| \le \sigma_n$ болады.

Белгінің шарты бойынша (3.6) жинақталатын қатар. Олай болса, ақырлы шек $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ бар. Сондықтан ақырлы шек

$$|S| = \left|\lim_{n\to\infty} s_n\right| = \lim_{n\to\infty}|s_n| \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,$$

яғни $|S| \le \sigma$ бар болады. Белгі дәлелденді.

2-теорема. Мүшелері кез келген сандар болатын қатар (3.2) үшін шек $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$ бар болса, $\rho < 1$ болғанда (3.2) қатар абсолют жинақталады да, $\rho > 1$ болғанда – жинақталмайды.

Дәлелдеу. $\rho < 1$ болған жағдай. Даламбер белгісі бойынша бұл жағдайда (3.6) қатар жинақталады, сол себепті (3.2) қатар абсолют жинақталады.

Егер $\rho > 1$ болса, (3.3) қатардың жалпы мүшесі $|u_n|$ нольге ұмтылмайды. Демек, (3.2) қатардың жалпы мүшесі u_n-де нольге ұмтылмайды. Сондықтан, (3.2) қатар жинақталмайды. 2-теорема дәлелденді.

3-теорема. Мүшелері кез келген сандар болатын қатар (3.2) үшін шек $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$ бар болса, $\rho < 1$ болғанда (3.2) қатар абсолют жинақталады, ал $\rho > 1$ болса – жинақталмайды.

Бұл теореманың дәлелдеуі 2-теореманың дәлелденуіне ұқсас болғандықтан, оны дәлелдеп шығуды оқушыларға ұсынамыз.

1-мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$ (мұндағы α - кез келген сан) қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі. $|\sin n\alpha| \le 1$ болғандықтан, n мен α-ның кез келген мәндерінде $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{2^n}\right| \le \dfrac{1}{2^n}$ болады. Алайда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ геометриялық қатары жинақты болғандықтан, берілген қатар абсолют жинақты.

2-мысал. Айнымалы таңбалы

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1!} + \frac{2^2\cos 3\frac{\pi}{4}}{2!} + \frac{3^2\cos 5\frac{\pi}{4}}{3!} + \ldots + \frac{n^2\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{n!}$$

қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешуі.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2\, n!\cos(2n+1)\frac{\pi}{4}}{(n+1)!\, n^2\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{n+1}{n^2}\right) = 0 < 1$$

аламыз. Яғни, Даламбер белгісі бойынша берілген қатар абсолют жинақталады.

3. Қатарларға амалдар қолдану.

1.Қатарларды қосу және алу. Егер екі кез келген сандық қатарлар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мен $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолют жинақталатын болса, онда ол қатарлардың сәйкес мүшелерін қосу және алу тәсілімен құрылған

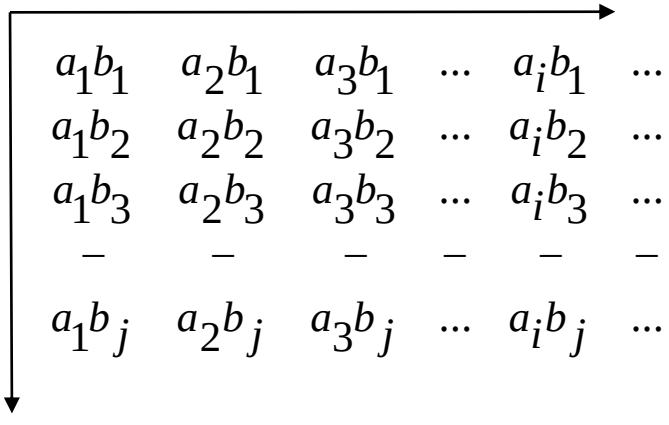
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \pm b_n\right)$$

қатарлары да абсолют жинақталады.

2.Қатарларды көбейту. Төмендегі екі жинақты қатар берілсін:

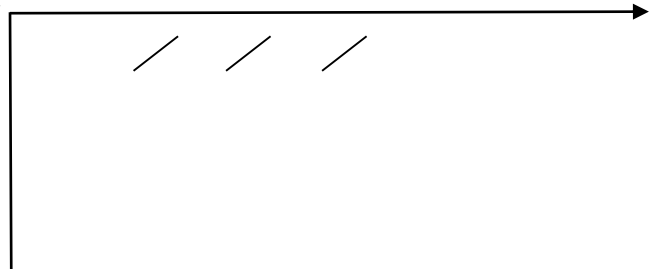
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \quad \text{және} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (3.8)$$

Шектеулі қосындыларды өзара көбейту ережесін қолданып, осы қатарлардың мүшелерінің әртүрлі $a_i b_j$ қос көбейтінділерін қарастырамыз. Бұлардан тік бұрышты шектеусіз матрица жасалады.



Бұл көбейтінділерді алуан түрлі тәсілмен жай тізбек түрінде орналастыруға болады.

Мысалы, бірінші рет Кошидың жасағанындай, көбейтінділерді диагональдар бойымен алып:



$$\begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots & a_ib_1 & \ldots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots & a_ib_2 & \ldots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots & a_ib_3 & \ldots \\ - & - & - & - & - & - \\ a_1b_j & a_2b_j & a_3b_j & \ldots & a_ib_j & \ldots \end{array}$$

әрбір диагоналдың бойындағы көбейтінділерді жеке топтап жазуға болады. Сонда төменгі қосынды шығады:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots +) + a_{n-1}b_2 + a_nb_1 \qquad (3.9)$$

Егер көбейтілетін қатарлар жинақты және олардың ең болмағанда біреуі абсолют жинақталатын болса, онда (3.9) қатары да жинақты болады.

Сонымен бірге

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1b_n + b_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots + (a_1b_n + b_2b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_2 + a_nb_1)$$

орындалады.

Шартты жинақты қатарлардың көбейтіндісі жинақты қатар немесе жинақсыз қатар болуы мүмкін.

Әрине, қосынды және көбейтінді ұғымдары қатарлардың кез келген ақырлы саны үшін орындалады.

Қатардың квадратын есептеу оны өзіне көбейту арқылы орындалады. Қатардың үшінші, төртінші, т.б. реті де дәл осы жолмен анықталады.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарына қатынасы деп

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

теңдігі орындалатындай $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ қатарын айтамыз.

Егер бұл үш қатардың барлығы жинақты болса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарлары абсолютті жинақты болса да, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ қатары жинақсыз болуы мүмкін екендігін ескертеміз.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \frac{a_1}{b_1} + \left(\frac{a_2}{b_1} - \frac{a_1 b_2}{b_1^2} \right) + \left(\frac{a_3}{b_1} - \frac{a_1 b_3}{b_1^2} - \frac{a_2 b_2}{b_1^2} + \frac{a_1 b_2^{\,2}}{b_1^3} \right) +$$

$$+ \left(\frac{a_4}{b_1} - \frac{a_1 b_4}{b_1^2} - \frac{a_2 b_3}{b_1^2} - \frac{a_3 b_2}{b_1^2} + \frac{2a_1 b_2 b_3}{b_1^2} + \frac{a_2 b_2^{\,2}}{b_1^3} - \frac{a_1 b_2^{\,3}}{b_1^4} \right) + \ldots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ қатарының әрбір келесі мүшесі оның алдыңғы мүшелері арқылы келесі формула көмегімен өрнектелуі мүмкін:

$$c_n = \frac{a_n - c_1 b_n - c_2 b_{n-1} - \ldots - c_{n-1} b_2}{b_1} \qquad (3.10)$$

Қатарды қатарға көпмүшені көпмүшеге бөлу ережелері бойынша бөлуге болады.

1-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ және $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ қатарларының айырымын табу қажет. Берілген қатарлар жинақсыз, ал олардың айырмасы жинақты қатар болатындығын дәлелдеу қажет.

Шешуі. Берілген қатарлардың айырымын құрайық:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2+1)}$. Бұл қатар салыстырудың 1-ші белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ қатары сияқты жинақты болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Абсолютті және шартты жинақты қатарлар дегеніміз не? Олардың негізгі айырмашылықтары қандай?
2. Абсолютті жинақты қатарлардың негізгі қасиеттері қандай?
3. Шартты жинақты қатарлардың мүшелерінің орнын ауыстыру олардың қосындысына қалай әсер етеді?
4. Қатарлардың абсолют жинақталуының қандай белгілері бар және олар қалай қолданылады?
5. Жинақты қатарларға қандай арифметикалық амалдар қолдануға болады және олардың орындалу шарттары қандай?