9-дәріс. Жазықтықтағы сызық теңдеуі. Жазықтықтағы сызықтың параметрлік теңдеуі
10-дәріс. Беттің теңдеуі

Дәріс жоспары:

1. Жазықтықтағы сызық ұғымы және оның теңдеуі.
2. Жазықтықтағы сызықтың параметрлік теңдеуі және оның берілу тәсілдері.
3. Кеңістіктегі бет ұғымы және беттің теңдеуі.
4. Беттің жалпы және параметрлік теңдеулері, олардың геометриялық мағынасы.

Жазықтықтағы сызық теңдеуі

Айнымалы *x* пен *y* шамаларды өзара байланыстыратын мынадай теңдікті

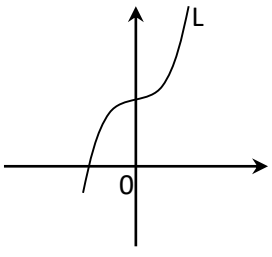
$$F(x, y) = 0 \qquad (1.1)$$

қарастырайық. Бұл теңдік оған енетін *x, y*-тің кейбір мәндерінде ғана дұрыс болатын болса, ол екі айнымалы теңдеу делінеді, ал *x, y*-тің кез-келген пар мәнінде дұрыс болса теңбе-теңдік делінеді. Мына теңдіктер: $2x + 3y = 0$, $x + y - 25 = 0$, $\sin x + \sin y - 1 = 0$ теңдеулер, $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y = 0$, $(x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0$ теңдіктер теңбе-теңдіктер болады.

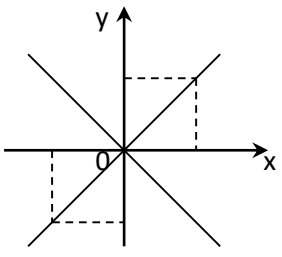
Аналитикалық геометрияның негізгі ұғымдарының бірі сызық ұғымы. Жазықтықта тік бұрышты *Oxy* координаталар жүйесі және L сызық берілсін (1-сурет).

Анықтама. Берілген $F(x, y) = 0$ теңдеу, қарастырылып отырған координаталар жүйесінде, L сызықтың теңдеуі делінеді, егерде ол сызықтың бойында жатқан кез-келген нүктенің координатасы (x, y) ол теңдеуді қанағаттандыратын, ал L сызығында жатпайтын нүктенің координатасы ол теңдеуді қанағаттандырмайтын болса.

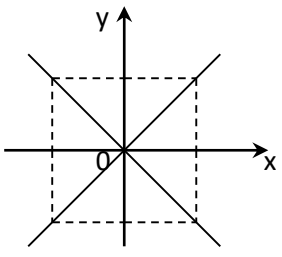
Бұл анықтамадан L сызығы жазықтықтың координаталары (1.1)-теңдеуді қанағаттандыратын, нүктелерінің жиыны екендігі шығады. Бұл кезде (1.1)-теңдеу L сызығын анықтайды, L сызығы (1.1)-теңдеу арқылы берілген делінеді.



1-сурет



2-сурет



3-сурет

Сызық теңдеулері геометриялық есептеуді алгебралық әдіспен шешуге мүмкіндік береді. Мысалы, $x^2 + y^2 = 1$ және $x + y = 0$ теңдеулермен анықталатын сызықтардың қиылысу нүктелерін табу туралы есеп, осы екі теңдеу жүйесін шешуге тіреледі.

L ызығы мынадай теңдеумен де $F(\rho, \varphi) = 0$ анықталуы мүмкін, мұндағы (ρ, φ) нүктенің поляр координаталары.

Сызық теңдеулеріне мысалдар қарастырайық.

1. $x - y = 0$ теңдеуі берілсін. Мұны былайша $x = y$ жазсақ, ол теңдеуді координаталары қанағаттандыратын нүктелер жиыны I және III координаталық бұрыштардың биссектрисасы болатынын байқау қиын емес (2-сурет).

2. $x^2 - y^2 = 0$ теңдеуі берілсін. Мұны былайша $(x + y) \cdot (x - y) = 0$ түрлендірсек, бұл теңдеуді координаталары қанағаттандыратын нүктелер жиыны екі түзуден бірі I мен III, екіншісі II мен IV координаталық бұрыштардың биссектрисасы

(3-сурет) – тұратындығы байқалады.

3. $x^2 + y^2 = 0$ теңдеуі берілсін. Бұл теңдеуді координаталары қанағаттандыратын нүктелер жиыны тек бір нүктеден (0, 0) тұрады. Бұл кезде теңдеу тозғындалмаған сызықты анықтайды дейді.

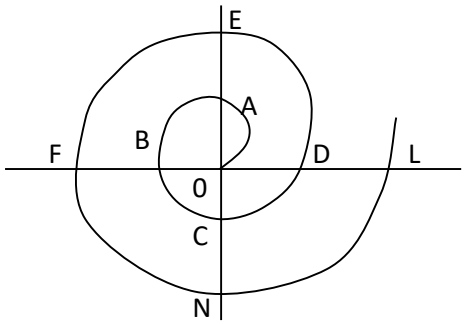
4. $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Кез-келген *x, y* үшін x^2 пен y^2 – теріс емес болатындықтан $x^2 + y^2 + 1 > 0$ болуы керек. Сондықтан координаталары бұл теңдеуді қанағаттандыратын бірде-бір нүкте жоқ. Олай болса бұл теңдеу жазықтықта ешқандай геометриялық бейнені анықтамайды.

5. $r = a\varphi$ теңдеуі берілсін, мұндағы *a* кез-келген оң таңбалы тұрақты шама. Осы теңдеумен анықталатын сызықтың графигін салайық.

Берілген теңдеумен анықталатын сызықты салу үшін φ-ге еркін мән беріп, r-дің сәйкес мәндерін табамыз:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	...
r	0	$\frac{\pi a}{4}$	$\frac{\pi a}{2}$	πa	$\frac{3\pi a}{2}$	$2\pi a$	$\frac{5\pi a}{2}$	...

Осы таблицалардағы мәндер бойынша оларға сай келетін нүктелерді полярлық координаталарға түсіреміз. Осылайша салынған нүктелер арқылы жүргізілген сызық берілген теңдеумен анықталатын сызықтың графигі болады (4-сурет).



4-сурет

Іздеп отырған сызықтың бойындағы *A, B, C, D, E, F, N, L* … нүктелерін табу үшін координаталардың полюсінен өзара перпендикуляр болатын екі түзу сызық жүргіземіз. Сонда егер, $OA = \frac{\pi a}{2}$ болса, онда $OB = 2 \cdot OA$, $OC = 3OA, OD = 4 \cdot OA$ т.с.с.

болады. Бұл кесіндіге сәйкес бұрыштар $\frac{2 \cdot \pi}{2}$, $\frac{3 \cdot \pi}{2}$, т.с.с. болады. φ бұрыштық нөлден бастап, өсуіне сәйкес, қисық та өсіп отырады. Бұл қисық Архимед спиралі деп аталады (4-сурет).

Жазықтықтағы сызықтың параметрлік теңдеуі

Көптеген жағдайда сызықтың теңдеуін оның нүктесінің ағымдық координаталарын параметр деп аталатын, бір аргументтің (мысалы *t*-ның) функциясы ретінде өрнектеп, сол функциялардың жүйесі арқылы анықтаған қолайлы болады. Сонда мына түрдегі теңдеу:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t) \qquad (2.1)$$

шығады. Оны сызықтың параметрлік теңдеуі деп атайды. Ондағы параметр *t*-ның әрбір мәніне сай *x, y* табылады, олар сызық бойындағы бір *M* нүктені анықтайды. Егер *t* өзгерсе *x, y* – те өзгереді, яғни *M* нүкте бір сызық сызады.

Сызық теңдеуін параметр арқылы анықтау әсіресе механикада қозғалыс теңдеуін өрнектеуге қолайлы. Егер материалдық нүкте жазықтың бойымен қозғалса, оның әрбір *t* моменттегі орны, яғни координаталары *x, y* белгілі болады. Ол *x* пен *y*-ты уақыттың функциясы ретінде анықтайтын $x = \varphi(t)$,

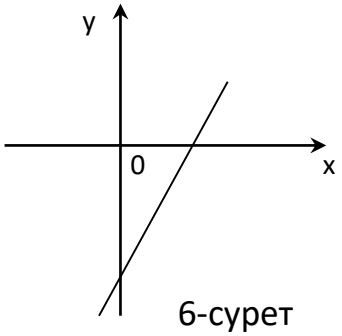
$y = \psi(t)$ теңдеу M нүктенің қозғалысының теңдеуі делінеді. Егер (2.1) теңдеуден параметр t-ны жойсақ (егер ол мүмкін болса), онда x пен y-ты тікелей байланыстыратын $F(x, y) = 0$ күйдегі теңдеу шығады, ол M нүктенің қозғалысының траекториясын анықтайтын теңдеу болады.

Мысал. Нүкте қозғалысының теңдеуі $x = t + 1, \quad y = 2t - 1$ берілген. Нүктелері арқылы бұл сызықты салу және оның траекториясының теңдеуін анықтау керек.

Шешуі. Ол үшін параметр t-ға еркін мәндер беріп, оған сай келетін x пен y-тың мәндерін табамыз:

t	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	-5	-3	-1	1	3	...

5-сурет



6-сурет

Содан соң координаталары арқылы нүктелерді саламыз (6-сурет). Егер берілген теңдеуден t-ны жойсақ: $t = x - 1, \ y = 2 . (x - 1) - 1 = 2x - 3$ болып $y - 2x + 3 = 0$ теңдеуі шығар еді. Ол қозғалыс траекториясының теңдеуі болады және қозғалыс траекториясы түзу сызық болады.

Беттің теңдеуі

Кеңістікте тік бұрышты $Oxyz$ координаталар жүйесі және бет берілсін. Айнымалы x, y, z-ті байланыстыратын

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (3.1)$$

теңдеуін қарастырайық.

Анықтама. Берілген $F(x, y, z) = 0$ теңдеу, алынған координаталар жүйесінде, S беттің теңдеуі делінеді, егер ол беттің бойында жататын кез-келген нүктенің координаталары (x, y, z) ол теңдеуді қанағаттандыратын, ал S бетте жатпайтын нүктенің бірде-бірінің координатасы ол теңдеуді қанағаттандырмайтын болса.

Бұл анықтама бойынша S бет координаталары (3.1)-теңдеуді қанағаттандыратын кеңістік нүктелерінің жиыны болады. Егер берілген координаталар жүйесінде (3.1)-теңдеу S бетінің теңдеуі болса, онда бұл теңдеу S бетін анықтайды делінеді.

Айтылғандардан мынадай екі есеп шығады.

1.Геометриялық нүктелер жиыны ретінде бет беріледі. Сол беттің теңдеуін құру керек.

Мысал. Центрі $C(a,b,c)$ нүкте болатын, радиусы *R*-ге тең сфераның (шар бетінің) теңдеуін табу керек.

Шешуі. Сфераның $M(x,y,z)$ кез-келген бір нүктесі болсын. Сфераның анықтамасы бойынша егер *M* сферада жатса, тек сонда ғана ол нүктенің центрден қашықтығы *R*-ге тең болады:

$$CM = R \quad \text{немесе} \quad CM = \sqrt{(x-a\ )^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\,.$$

Бұл теңдіктің екі жағын да квадраттап, сфераның іздеген канондық теңдеуін аламыз.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Мұндағы *a, b, c, R* – берілген тұрақты сандар, *x, y, z* – еркін нүктенің координаталары.

2.Нүкте координаталары *x, y, z* арасындағы теңдеу беріледі. Бұл теңдеумен анықталатын беттің формасын зерттеу керек.

Мысал. Екінші дәрежелі теңдеу берілген

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 1 = 0.$$

беттің формасын анықтау керек.

Шешуі. Бұл теңдеумен анықталатын бет сфера болады. Оған теңдеуді түрлендіру арқылы қол жеткізуге болады. Әр айнымалыны жеке-жеке бөліп алып, оны толық квадратқа дейін толтырамыз:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 8y + 16 - 16 + z^2 - 6z + 3 - 9 + 1 = 0.$$

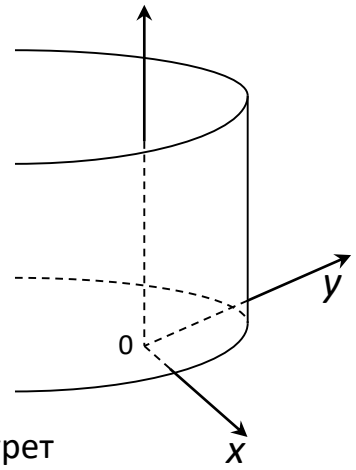
Бұдан $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 25$. Сөйтіп, берілген теңдеу центрі (1, 4, 3) нүкте болатын, радиусы 5-ке тең сфераны анықтайды екен.

Сонымен $F(x,y,z) = 0$ теңдеуі бетті кескіндейді. Енді бет теңдеуінде *z* болмасын:

$$F(x,y) = 0. \qquad (3.2)$$

Бұл теңдеу *Oxy* координаталар жазықтығында, координаталары (x, y) $F(x, y) = 0$ теңдеуді қанағаттандыратын нүктелер жиынын, яғни *Oxy* жазықтығында жататын *L* сызығын анықтайды. Ол теңдеуді алғашқы екі координатасы *L* сызығының бойында жатқан нүктенің координатасындай болатын, яғни *L* сызығына проекцияланатын кеңістіктің кез-келген нүктесінің координатасында қанағаттандырады. Ал, мұндай нүктелердің жиыны *L* сызығының бойымен *Oz* осіне параллель болып қозғалатын *t* түзуі жасайтын бет болады. Ондай бет цилиндрлік бет делінеді. *L* сызығы ол беттің бағыттаушысы, ал *Oz* осіне параллель болып қозғалатын *t* түзуі оның жасаушысы делінеді.

Сонымен $F(x, y) = 0$ теңдеуі кеңістікте жасаушысы *Oz* осіне параллель болатын цилиндрлік бетті анықтайды. Керісінше, жасаушысы *Oz* осіне параллель болатын кез-келген цилиндрлік бет $F(x, y) = 0$ түрдегі теңдеумен анықталады. Шынында да, бұл кезде беттің бағыттаушы сызығы *L*-ді *Oxy* жазықтығынан алуға болады. Ол $F(x, y) = 0$ теңдеумен анықталады және қарастырылып отырған кеңістікте цилиндрлік бетті кескіндейді. Осы сияқты *x* не *y* енбейтін $F(x, y) = 0$, $F(x, z) = 0$ теңдеулері жасаушылары сәйкесінше, *x* және *y* осьтеріне параллель болатын цилиндрлік беттерді анықтайды.



7-сурет

$y^2 = 2px$ теңдеу кеңістікте бағыттаушысы *Oxy* жазықтығында жататын парабола болатын, жасаушысы *Oz* осіне параллель болатын цилиндрлік бетті анықтайды (7-сурет).

Бақылау сұрақтары:

1. Жазықтықтағы сызық теңдеуі дегеніміз не және ол қалай беріледі?
2. Жазықтықтағы сызықтың параметрлік теңдеуі қалай анықталады?
3. Сызықтың параметрлік теңдеулерінен айқын емес теңдеуіне қалай көшуге болады?
4. Кеңістіктегі бет теңдеуі дегеніміз не және ол қандай түрде беріледі?
5. Беттің жалпы және параметрлік теңдеулерінің айырмашылығы қандай?