7-дәріс. Бір тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінен екіншісіне көшу.
8-дәріс. Екі вектордың скаляр, векторлық, аралас көбейтіндісі.

Дәріс жоспары:

1. Бір тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінен екіншісіне көшу. Координаталар жүйесін параллель көшіру және бұру.
2. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі, оның қасиеттері және координаталар арқылы өрнектелуі.
3. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі, оның қасиеттері және координаталар арқылы есептелуі.
4. Үш вектордың аралас көбейтіндісі, оның қасиеттері және координаталар арқылы есептелуі.

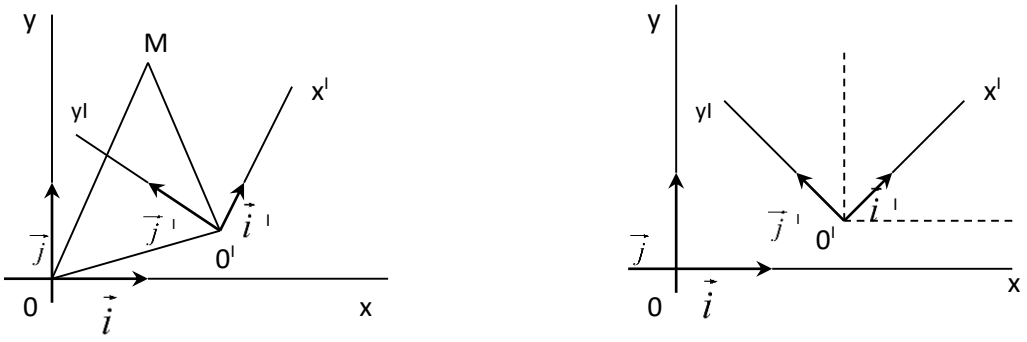
Бір тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінен екіншісіне көшу

Жазықтыққа тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін ендіру арқылы жазықтықтың әрбір нүктесіне бір пар екі нақты санды бір мәнді сәйкестендіруге, керісінше кез-келген екі нақты сан жұбына жазықтықтың бір нүктесін бір мәнді сәйкестендіруге болатынын көрдік. Ол сәйкестік жазықтықтың нүктесі мен оның координатасы арасындағы сәйкестік. Егер жазықтыққа басқа координаталар жүйесін ендірсе, онда ол жазықтықтың нүктелеріне сәйкестендірілген сандар да өзгереді.

Алдағы жерде, алынған координаталар жүйесінде жеке-жеке нүктелерді ғана емес, белгілі бір тәртіпте орналасқан нүктелердің жиыны болып табылатын әртүрлі фигураларды (түзу, үшбұрыш, шеңбер, эллипс, т.б.) қарастырамыз, олардың барлық нүктелеріне ортақ қасиетін аналитикалық өрнектейміз, олар бағынатын теңдеулерін жазамыз. Координаталар жүйесін өзгерткенде ол фигуралардың аналитикалық өрнектері де өзгереді. Сондықтан координаталар жүйесін өзгерту арқылы фигуралардың аналитикалық өрнегін зерттеуге қолайлы жағдайға келтіру қажеттілігі туады.

Бір тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінен екінші тік бұрышты декарттық координаталар жүйесіне көшкенде жеке алынған бір нүктенің координаталары қалай өзгеретінін, олар арасында қандай байланыс болатынын қарастырайық. Жазықтықта Oxy тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі берілсін. Ол координаталар жүйесін параллель жылжыту арқылы бас нүктесін O' нүктеге көшіріп, осьтерін α бұрышқа бұрайық. Сонда шыққан координаталар жүйесін $O'x'y'$ дейік (25-сурет). Сөйтіп Oxy координаталар жүйесі $O'x'y'$ координаталар жүйесіне түрленді. Соңғы шыққан координаталар жүйесінің (оны жаңа жүйе дейік) базистік

векторлары $\vec{i}', \vec{j}'$ болсын, бұрынғы координаталар жүйесінің (оны ескі жүйе дейік) базистік векторлары $\vec{i}, \vec{j}$ болсын. Жаңа координаталар жүйесінің элементтерінің ескі координаталар жүйесіндегі координаталары белгілі болсын: $O'(x_0, y_0)$, $\vec{i}' = (a_1, a_2)$, $\vec{j}' = (b_1, b_2)$. Осылар арқылы кез-келген M нүктенің ескі жүйедегі координаталары (x, y)-ты сол нүктенің жаңа жүйедегі координаталары (x', y') арқылы өрнектеу, координаталар жүйесін түрлендірудің негізгі мақсаты болып табылады. Сол (x, y) пен (x', y')-ты байланыстыратын өрнекті координаталарды түрлендіру формуласы дейді.



а) б)

25-сурет

25 а-суретте Oxy және $O'x'y'$ тік бұрышты координаталар жүйелері және M нүктесі кескінделген.

$$\Delta OO'M \Rightarrow \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OO}' + \overrightarrow{O'M} \qquad (12.1)$$

Ал, $O'(x_0, y_0)$, $\vec{i}' = (a_1, a_2)$, $\vec{j}' = (b_1, b_2)$, $M(x, y)$ және $M(x', y')$ болғандықтан: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $OO' = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ және

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = x'(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) + y'(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) =$$

$$= (a_1x' + b_1y')\vec{i} + (a_2x' + b_2y')\vec{j}$$

болар еді. Бұларды (12.1) орнына қойсақ

$$x\vec{i}' + y\vec{j}' = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + (a_1x' + b_1y')\vec{i} + (a_2x' + b_2y')\vec{j}.$$

Тең векторлардың сәйкес координаталары да тең болатындықтан, соңғы теңдіктен $\vec{i}$ және $\vec{j}$ коэффициенттерін теңестірсек:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 x' + b_1 y_1', \\ y &= y_0 + a_2 x' + b_2 y'. \end{aligned} \qquad (12.2)$$

Бұл координаталарды түрлендіру формуласы делінеді. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ базис $(\vec{i}, \vec{j})$-ден $(\vec{i}', \vec{j}')$ базиске көшу матрицасы делінеді. Оның анықтауышы $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ болады, себебі базистік векторлар коллинеар емес. Сондықтан (12.2)-тен x' пен y' бір мәнді анықталады:

$$x' = \frac{b_2(x - x_0) - b_1(y - y_0)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad y' = \frac{a_1(y - y_0) - a_2(x - x_0)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Жаңа координата жүйесінің осьтері ескі координата жүйесінің осьтерін α бұрышқа бұру нәтижесінде шыққандықтан (12.2) формуладағы a_1, a_2, b_1, b_2 коэффициенттерді сол бұрыш арқылы өрнектеуге болады. Ол үшін §10-дегі 1-теореманы және (10.1), (10.2) формулаларды пайдаланайық.

Сонда 25 б-суретті ескерсек:

$$a_1 = \left|\vec{i}'\right| \cos(\vec{i}', \vec{i}) = 1 \cdot \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$a_2 = \left|\vec{i}'\right| \cos(\vec{i}', \vec{j}) = 1 \cdot \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$b_1 = \left|\vec{j}'\right| \cos(\vec{j}', \vec{i}) = 1 \cdot \cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$b_2 = \left|\vec{j}'\right| \cos(\vec{j}', \vec{i}) = 1 \cdot \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Сонда (12.2) мына түрге келеді

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= y_0 + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (12.3)$$

Мұндағы $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$ болғандықтан (12.3)-тен x' пен y' бірмәнді табылады.

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' &= -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (12.4)$$

Дербес жағдайларын қарастырайық

1) Егер $O'x'y'$ координаталар жүйесі Oxy координаталар жүйесінен координата осьтерінің бағытын өзгертпей параллель жылжыту арқылы шыққан болса, онда $\alpha = 0^0$ болар еді, ал $\cos 0^0 = 1,\ \sin 0^0 = 0$ болғандықтан (12.3) мына түрге келеді.

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y.' \end{cases} \qquad (12.5)$$

2) Егер $O'x'y'$ координаталар жүйесі Oxy координаталар жүйесінен координата осьтерінің басын өзгертпей, тек осьтерді α бұрышқа бұру нәтижесінде шыққан болса, онда $x_0 = y_0 = 0$ болар еді де, бұл кезде (12.3) мына түрге келеді.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (12.6)$$

(12.3) формула тік бұрышты декарттық координата жүйесін тік бұрышты декарттық жүйесіне түрлендірудің жалпы формуласы, (12.5) формула – параллель жылжыту, (12.6) формула – бұру арқылы түрлендіру формулалары.

1-мысал. A нүктенің жаңа жүйедегі координаталары (4; 2). Бас нүкте өзгеріссіз қалып, ескі жүйенің координата осьтері $\alpha = 45^0$ бұрышқа бұрылған болса, осы нүктенің ескі жүйедегі координаталары неге тең болады?

Шешуі. (12.6) формула бойынша:

$$x = 4\cos 45^0 - 2\sin 45^0 = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$y = 4\sin 45^0 + 2\cos 45^0 = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Сонымен $A(\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})$.

2-мысал. Координата жүйесінің осьтерінің бағыты өзгертілмей, оның бас нүктесі $O'(2,-3)$ нүктеге көшірілген. Ескі жүйедегі координаталары (7, 5) болатын нүктенің жаңа жүйедегі координаталары неге тең болады?

Шешуі. (12.5) формула бойынша

$$\begin{cases} 7 = 2 + x', \\ 5 = -3 + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 7 - 2, \\ y' = 5 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 5, \\ y' = 13. \end{cases}$$

3-мысал. Координата жүйесінің бас нүктесі (–1, –2) нүктеге көшіріліп, осьтері 30^0-қа бұрылған. Сонда A нүктенің ескі жүйедегі координаталары $(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ болса, жаңа жүйедегі координаталары қандай болады?

Шешуі. (12.3) формула бойынша:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x'\cos 30^0 - y'\sin 30^0, \\ -\sqrt{3} = -2 + x'\sin 30^0 + y'\cos 30^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \dfrac{1}{2}y', \\ -\sqrt{3} = -2 + \dfrac{x'}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases} \Rightarrow$$

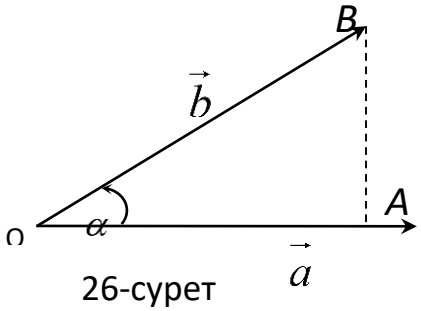
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x' - y' = 4\sqrt{3} + 2, \\ x' + \sqrt{3}y' = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4, \\ y' = -2. \end{cases}$$

Сонда $A(4,\ -2)$ болады.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі

Кеңістікте бір O нүктеден шығатын $\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ векторлары берілсін.

АНЫҚТАМА. Векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ арасындағы бұрыш деп олар ортақ O нүктеге келтірілген кездегі AOB бұрышының кішісін айтады (26-сурет).



26-сурет

Сонымен $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ және $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ векторлардың арасындағы бұрыш OA сәулені бұрып, OB сәулемен беттестіретін бұрыштың кішісіне тең болады. Векторлар

арасындағы бұрышты $\angle(\vec{a},\ \vec{b})$ арқылы, ал оның шамасын $(\vec{a}^{\wedge}, \vec{b}) = \alpha$ арқылы белгілейді. Бұрыштың анықтамасы бойынша векторлар арасындағы бұрыш α мына $0 \le \alpha \le \pi$ аралықта өзгереді.

Анықтама. Нөлдік емес екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп, ол векторлардың ұзындықтары мен олардың арасындағы бұрыштың косинусының көбейтіндісіне тең болатын санды (скалярды) айтады.

Берілген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скаляр көбейтіндісін $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\vec{b}$ немесе $(\vec{a},\ \vec{b})$ арқылы белгілейді. Сонда анықтама бойынша

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha \qquad (13.1)$$

мұндағы $\alpha = (\vec{a}^{\wedge}, \vec{b})$

Векторлар арасындағы бұрыштың әр түрлі жағдайларын қарастырайық.

1) Векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ бағыттас, яғни $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Бұл жағдайда векторлар арасындағы бұрыш нөлге тең, яғни $\alpha = (\vec{a}^{\wedge}, \vec{b}) = 0$. Сондықтан бұл кезде (13.1) формула бойынша $\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ болады.

2)Векторлар перпендикуляр (ортогональ), яғни $\vec{a} \perp \vec{b}$. Демек, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Сондықтан (13.1)-тен $\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 90^0 = 0$ болады. Соңғы теңдік берілген векторлардың біреуі немесе екеуі де нөлдік вектор болған кезде де орындалады. Ал, нөлдік векторды кез-келген векторға перпендикуляр деп қарастыруға болады. Сондықтан $\vec{a}\vec{b} = 0$ теңдік екі вектордың перпендикуляр болуының қажетті және жеткілікті шарты болып табылады.

3) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары өзара перпендикуляр болмасын. Төмендегі екі жағдайды қарастырайық: **а)** $\alpha < \frac{\pi}{2}$ болсын. Сүйір бұрыштың косинусының мәні оң сан болады. Сондықтан $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (сүйір) болғанда векторлардың скаляр көбейтіндісі әр уақытта оң

сан болады; **б)** $\alpha > \frac{\pi}{2}$ болсын. Доғал бұрыштың косинусының мәні теріс сан болады. Сондықтан арасындағы бұрышы доғал болатын векторлардың көбейтіндісі теріс сан болады.

Екі вектордың скаляр көбейтіндісін олардың бірінің екіншісіне түскен проекциясына сүйеніп, басқаша өрнектеуге болады. $\vec{a}$ векторы ось бойында жатсын, онда ось $\vec{a}$ векторымен анықталады. Бұл кезде $\vec{b}$ векторының $\vec{a}$ векторымен анықталатын осьтегі проекциясы $\vec{b}$ векторының $\vec{a}$ векторындағы проекциясы: $np_{\vec{a}}\vec{b}$ болып шығады. Сонда §10-тағы 1-теорема бойынша $np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cos\alpha$ болар еді. Осыны ескерсек (13.1) формула былайша өзгерер еді.

$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{b}$.Сөйтіп, векторлардың скаляр көбейтіндісін былайша да өрнектеуге болады:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{b}\,. \quad \text{және} \quad \vec{a}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| np_{\vec{b}}\vec{a}\,. \qquad (13.2)$$

Бұған сүйеніп, екі вектордың скаляр көбейтіндісіне, екінші түрде анықтама беруге болады.

Анықтама. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп, олардың біреуінің ұзындығын, осы вектормен анықталатын осьтегі екінші вектордың проекциясына көбейткенде шығатын санды айтады.

Векторлардың скаляр көбейтіндісінің қасиеттерін қарастырайық.

1^0.Ауыстырымдылық қасиеті. Көбейткіш векторлардың орнын ауыстырғаннан олардың скаляр көбейтіндісі өзгермейді, яғни $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ болады.

Дәлелі. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар арасындағы бұрышты α десек, $\vec{b}$ мен $\vec{a}$ векторлар арасындағы бұрыш та α болады. Сонда векторлардың скаляр көбейтіндісінің анықтамасы бойынша:

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos\alpha \qquad \text{және} \qquad \vec{b}\vec{a} = \left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right| \cos\alpha$$

теңдіктері орындалады. Бұл теңдіктердің оң жақтары тең болғандықтан, сол жақтары да тең болады, яғни $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ болады.

2^0.Үлестірімділік қасиеті. Векторды екі вектордың қосындысына скаляр көбейту үшін оны қосылғыш векторлардың әрқайсысына жеке-жеке көбейтіп, нәтижелерін қосу керек, яғни $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$ болады.

Дәлелі. Екі вектордың скаляр көбейтіндісін проекция ұғымына сүйеніп өрнектеу формуласы (13.2) бойынша $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{b}(\vec{b}+\vec{c})$ болар еді.

Ал, векторлар қосындысының проекциясы туралы теорема бойынша $np_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=np_{\vec{a}}\vec{b}+np_{\vec{a}}\vec{c}$ болады. Соңғы теңдікті және сандар үшін үлестірімділік заңның орындалатынын ескерсек:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|(np_{\vec{a}}\vec{b}+np_{\vec{a}}\vec{c})=\left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{b}+\left|\vec{a}\right| np_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$$

болып шығады.

3^0. Сан көбейткішті скаляр көбейтінді таңбасының астына алып жазуға да, скаляр көбейтінді таңбасының алдына шығарып жазуға да болады, яғни $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$ теңдігі орындалады.

Дәлелі. $\lambda>0$ болсын. Сонда $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\left|\lambda\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$. Сандар үшін терімділік заңы орындалады. Демек,

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\left|\lambda\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha=\lambda(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha)=\lambda(\vec{a}\vec{b})$$

болады. Сонымен $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$ екен.

Енді $\lambda<0$ болсын. Бұл кезде. $\vec{a}$ мен $\lambda\vec{a}$ векторларының бағыттары қарама-қарсы болады. Сондықтан $(\vec{a},\vec{b})=\alpha$ болса, $(\lambda\vec{a},\vec{b})=\pi-\alpha$ болады. Осыларды ескерсек:

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}=\left|\lambda\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\pi-\alpha)=\left|\lambda\right|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|(-\cos\alpha)=-\lambda\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|(-\cos\alpha)=$$

$$=\lambda\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha=\lambda(\vec{a}\vec{b})$$

қасиет дәлелденді. Дәлелденген қасиетті терімділік қасиет деп атайды.

4^0. $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$ болады (скаляр квадраттың теріс еместік қасиеті).

Дәлелі. Анықтама бойынша $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cdot 1=\left|\vec{a}\right|^2$. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ көбейтіндіні $\vec{a}$ векторының скаляр квадраты дейді де, $\vec{a}^2$ арқылы белгілейді. Сонымен $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$, яғни вектордың скаляр квадраты ол вектордың ұзындығының квадратына тең болады. Соңғы формуладан $\vec{a}\neq 0$ болса, $\vec{a}^2>0$ болатындығы, $\vec{a}=0$ болса, $\vec{a}^2=0$ болатындығы шығады. Сонымен $\vec{a}^2\geq 0$ болады.

Енді координаталармен берілген векторлардың скалярлық көбейтіндісін қарастырайық.

Теорема. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының тік бұрышты декарттық координаталар жүйесіндегі координаталары: $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ болса, онда ол векторлардың скаляр көбейтіндісі сол векторлардың сәйкес координаталарының көбейтінділерінің қосындысына тең болады, яғни

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (13.3)$$

болады.

Дәлелі. Координаталары белгілі болғандықтан берілген векторлар базистік векторларға былайша жіктелер еді: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ және $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Мұның екі жағын бір-біріне мүшелеп көбейтсек:

$$\vec{a}\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=(\vec{i}\vec{i})x_1x_2+(\vec{j}\vec{j})y_1y_2+(\vec{k}\vec{k})z_1z_2+$$
$$+(\vec{i}\vec{j})x_1y_2+(\vec{i}\vec{k})x_1z_2+(\vec{j}\vec{i})y_1x_2+(\vec{j}\vec{k})y_1z_2+(\vec{k}\vec{i})z_1x_2+(\vec{k}\vec{j})z_1y_2. \qquad (13.4)$$

Мұндағы бірлік векторларының скалярлық көбейтінділері скалярлық көбейтіндінің анықтамасы бойынша мынаған тең:

$$\vec{i}\vec{i}=1,\ \vec{j}\vec{j}=1,\ \vec{k}\vec{k}=1,\ \vec{i}\vec{j}=\vec{j}\vec{k}=\vec{k}\vec{j}=0,\ \vec{i}\vec{i}=\left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\cos 0^0=1,\ (\vec{i}\vec{j})=1\cdot 1\cdot\cos 90^0=0$$

Бірлік векторларының осы скалярлық көбейтінділерінің мәндерін (13.4) теңдеуге қойып, мынаны табамыз:

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

1-салдар.Координаталары арқылы берілген $\vec{a}=(x,y,z)$ вектордың ұзындығы мына формула бойынша анықталады.

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (13.5)$$

Шынында да, $|\vec{a}| = \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$. Бұдан, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ теңдік шығады.

2-салдар. Екі $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлар арасындағы бұрыш мына формуламен анықталады:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (13.6)$$

Мұны дәлелдеу үшін (13.1) формуласына (13.3) мен (13.5) теңдіктерден $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ мәндерін қою жеткілікті.

3-салдар. Нөлдік емес $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлар перпендикуляр болуы үшін

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \qquad (13.7)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама. Кез-келген $\vec{a} = (x, y, z)$ вектордың $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ базистік векторлармен жасайтын α, β, γ бұрыштарының косинустарын: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ сол вектордың бағыттаушы косинустары деп атайды.

4-салдар. Нөлдік емес $\vec{a} = (x, y, z)$ векторының бағыттаушы косинустары мына формулалар арқылы анықталады:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (13.8)$$

Шынында да (13.6) формула бойынша

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{1 + 0 + 0}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \cos(\hat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{x\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot 0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{0+1+0}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\hat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{0+0+1}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Бұларды квадраттап қоссақ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (13.9)$$

болып шығады. Егер $\vec{a}$ вектор бірлік вектор болса, $|\vec{a}| = 1$ болады да (13.8) формуладан:

$$\cos\alpha = x, \quad \cos\beta = y, \quad \cos\gamma = z$$

болады, яғни бірлік вектордың координаталары бағыттаушы косинустарына тең болады. (13.8) формуладан:

$$x = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\alpha = |\vec{a}|\cos(\hat{\vec{a}, \vec{i}}) = np_{\vec{i}}\vec{a},$$

$$y = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\beta = |\vec{a}|\cos(\hat{\vec{a}, \vec{j}}) = np_{\vec{j}}\vec{a},$$

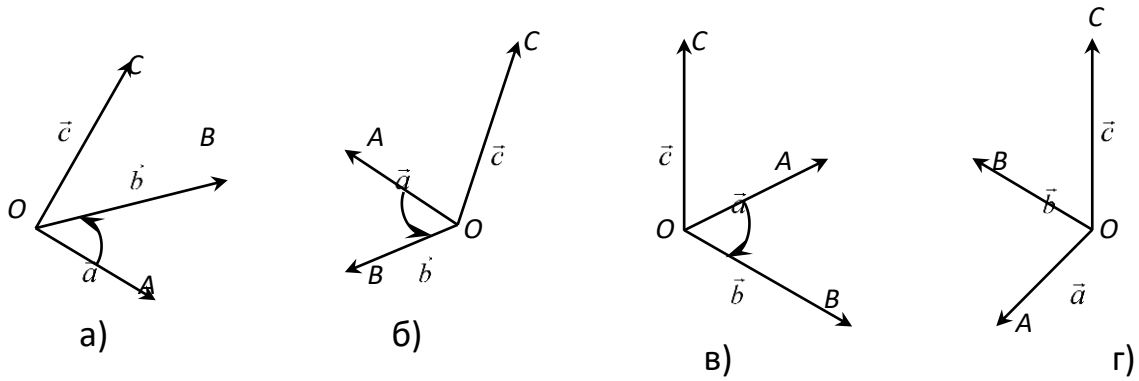
$$z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\gamma = |\vec{a}|\cos(\hat{\vec{a}, \vec{k}}) = np_{\vec{k}}\vec{a}$$

болып шығады. Бұл вектор координатасының геометриялық мәнін ашады: вектордың координаталары ол вектордың *Ox, Oy, Oz* осьтеріне түскен проекциясын білдіреді.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі

1. **Компланар емес векторлар үштігі.** Кеңістіктің кез-келген O нүктесінен шығатын компланар емес $\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ векторлары берілсін.

Анықтама. Бір нүктеден басталатын компланар емес векторлар үштігі оң делінеді, егер олардың ортақ нүктесінен, ең қысқа жолмен $\vec{a}$ -ны $\vec{b}$ -ға беттестіруге бұратын бұру бағыты, $\vec{c}$ вектордың ұшынан сағат тілі қозғалысының бағытына кері болып байқалса (27 а,б-сурет), ал сағат тілінің қозғалысы бағытындай болып көрінсе, онда сол үштік делінеді (27 в,г-сурет).



27-сурет

2. Векторлардың векторлық көбейтіндісі.

Анықтама. $\vec{a}$ векторының $\vec{b}$ векторына векторлық көбейтіндісі деп, төмендегі үш шартты қанағаттандыратын үшінші вектор $\vec{c}$ -ны айтады:

1) $\vec{c}$ векторы көбейткіш векторлардың екеуіне де перпенднкуляр болады: $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$.

2) $\vec{c}$ векторының ұзындығы көбейткіш векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ -ның ұзындықтарын олар арасындағы бұрыштың сннусына көбейткенге тең болады:

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a}^{\wedge}, \vec{b}), \qquad (14.1)$$

мұндағы $0 \le (\vec{a}^{\wedge}, \vec{b}) \le 180^0$.

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары (көрсетілген реттен) оң үштік құрайды. Екі вектордың векторлық көбейтіндісін былайша белгілейді: $[\vec{a}\ \vec{b}]$ немесе $\vec{a} \times \vec{b}$. Векторды векторға көбейтудің бұл анықтамасынан тікелей мына тұжырымдардың дұрыстығы шығады.

1) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардың векторлық көбейтіндісі болатын вектордың бағыты, осы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар жатқан жазықтыққа перпенднкуляр бағытта болады (бұл анықтаманың 1-шартынан шығады).

2) Екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ вектордың векторлық көбейтіндісі болатын $\vec{c}$ вектордың ұзындығы сол векторларға құрылған параллелограмның ауданына сан жағынан тең болады. Өйткені қабырғалары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін

алынған параллелограмның (28-сурет) ауданы да $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})$-ға тең болатыны мектеп курсынан белгілі.

3) (14.1) формуладан екі вектордың векторлық көбейтіндісі болатын вектордың не көбейткіш векторлардың бірі нөлдік вектор болғанда не ол екі вектор коллннеар болғанда ғана нөлге тең болатыны шығады.

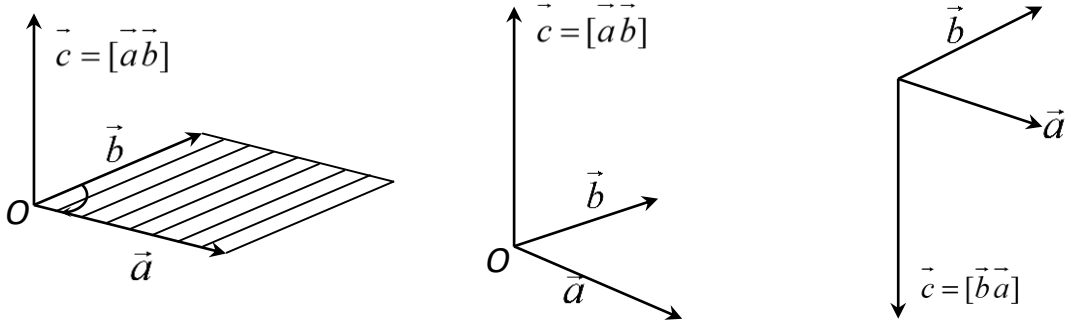
Шынында да $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})=0$ болуы үшін не $\left|\vec{a}\right|=0$ не $\left|\vec{b}\right|=0$ не $\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})=0$ болуы керек. Ал, бұл не $\vec{a}=0$ не $\vec{b}=0$ не $\vec{a}\,\text{II}\,\vec{b}$ деген сөз.

Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ нөлдік емес өзара коллннеар векторлар болса, онда $\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})=0$ болатындықтан $[\vec{a}\,\vec{b}]=0$ болады. Бұл екі вектордың коллннеар болу шарты болады.

Егер $\vec{a}=\vec{b}$ болса, онда олар коллннеар болады да, олардың векторлық көбейтіндісі болатын вектор ұзындығы нөлге тең болады. Сөйтіп, тең векторлардың векторлық көбейтіндісі нөлдік вектор болады.

4) Екі вектордың векторлық көбейтіндісінде көбейтілетін векторлардың ретін өзгерткеннен олардың векторлық көбейтіндісінің ұзындығы өзгермейді, бағыты қарама-қарсы бағытқа ауысады, яғнн $[\vec{a}\,\vec{b}]=-[\vec{b}\,\vec{a}]$болады.

Дәлелі.Векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша: $\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})$, $\left|[\vec{b}\,\vec{a}]\right|=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\sin(\hat{\vec{b},\ \vec{a}})$ болатындықтан және $(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})$ мен $(\hat{\vec{b},\ \vec{a}})$ бір бұрыштың әртүрлі таңбалануы болғандықтан $\sin(\vec{a},\vec{b})=\sin(\vec{b},\vec{a})$ болады да $\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right|=\left|[\vec{b}\,\vec{a}]\right|$ болып шығады.



29-сурет

Ал, $[\vec{a}\,\vec{b}]$ векторда, $[\vec{b}\,\vec{a}]$ векторда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ жатқан жазықтыққа перпенднкуляр болатындықтан және $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}\,\vec{b}]$ векторлар үштігі де, $\vec{b}$, $\vec{a}$, $[\vec{b}\,\vec{a}]$ векторлар үштігі де осы тәртіпте орналасуында оң үштік жасауға тністілігінен $[\vec{a}\,\vec{b}]$ вектордың жоғары қарай (29 а-сурет), $[\vec{b}\,\vec{a}]$ векторының төмен қарай (29 б-сурет) бағытталатыны, яғнн бір-біріне қарама-қарсы бағытта болатыны шығады.

Сонымен $[\vec{a}\,\vec{b}] = -[\vec{b}\,\vec{a}]$ болады.

Ескерту: 1) Векторларды векторлы көбейтуде ауыстырымдылық заңы орындалмайды. Сондықтан векторлардың орнын ауыстыруда сақ болу керек. 2) Векторлардың векторлы көбейтіндісінің бағытын табу үшін «оң қол ережесін» пайдалануға болады: оң қол алақанын жазып бас бармақ пен сұқ саусақты перпенднкуляр деп есептеп, ортаңғы саусақты алақанға перпенднкуляр етіп алып, бас бармақты $\vec{a}$ вектор бағытымен, сұқ саусақты $\vec{b}$ вектор бағытымен дәл келтірсек, ортаңғы саусақ бағыты олардың векторлық көбейтіндісі болатын $[\vec{a}\,\vec{b}]$ вектордың бағытын көрсетеді.

5) Векторлық көбейтіндіде санға қарағанда терімділік қаснет орындалады, яғнн λ саны мен $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар үшін

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (14.2)$$

теңдік орындалады.

Дәлелі. $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ жағдайларды жеке-жеке қарастырайық.

а) $\lambda = 0$ болса (14.2) үштіктің екі жағында нөлдік вектор болады. Сондықтан (14.2) $\lambda = 0$ болғанда дұрыс.

б) $\lambda > 0$ болсын. Бұл кезде $\lambda\vec{a}$, $\lambda\vec{b}$-ның бағыттары сәйкесінше $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлармен бағыттас болады. Сондықтан $\sin(\widehat{\lambda\vec{a}, \vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{a}, \lambda\vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ болады. Ал, параллелограмның бір қабырғасы λ есе артса, ауданы да λ есе артады. Сондықтан $\lambda > 0$ болған кезде де (14.2) дұрыс болады.

в) $\lambda < 0$ болсын. Онда $\vec{a}$ мен $\lambda\vec{a}$, $\vec{b}$ мен $\lambda\vec{b}$ қарама-қарсы бағытта болғандықтан $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ векторы да, $\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ векторы да $\vec{a}\times\vec{b}$ векторға қарама-қарсы бағытталған болады. Сондықтан олар $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ вектормен

бағыттас болады. Ал, $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, $(\lambda\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ векторлардың модульдері тең болатындықтан $\lambda<0$ болған кезде де (14.2) дұрыс болады.

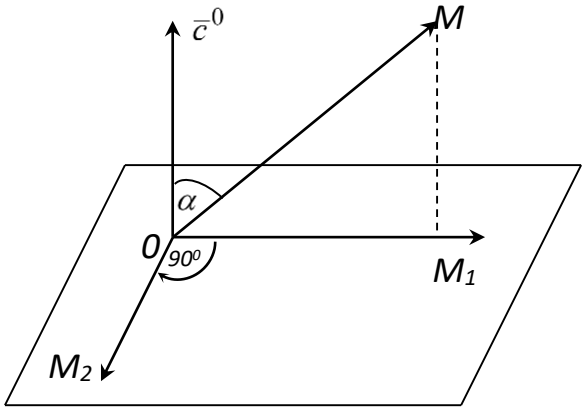
6) Векторлық көбейтінді де үлестірімділік заңы сақталады.

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \qquad (14.3)$$

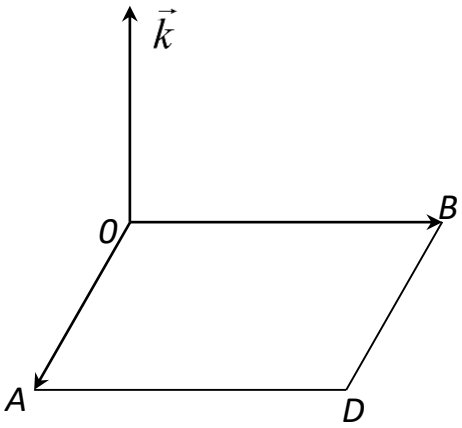
Дәлелі.Бұл (14.3) теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу үшін, ең әуелі мына $[\vec{a},\ \vec{c}^{\,0}]$ көбейтіндісінің графнгін салайық. Мұндағы $\vec{c}^{\,0}$ – бірлік вектор, ол жазықтыққа перпенднкуляр $\vec{c}^{\,0}\perp\Pi$. $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ векторын П жазықтығына проекцняласақ, онда осыған сәйкес $\overrightarrow{OM}_1$ векторы шығады, ал бұл векторды сағат тілінің бағытымен 90^0-қа бұрсақ, онда мұнан шыққан $\overrightarrow{OM}_2$ векторы мынаған тең: $\overrightarrow{OM}_2=[\vec{a}\,\vec{c}^{\,0}]$. Өйткені:

1) $\left|\overrightarrow{OM_1}\right|==|\vec{a}|\cos(90^0-\alpha)=|\vec{a}|\sin\alpha,\quad |\vec{a}|=\vec{a}$;

2) $\overrightarrow{OA_2}\perp\vec{a}$ және $\overrightarrow{OM}_2\perp\vec{c}^{\,0}$ (30-сурет).



30-сурет



31-сурет

Енді $\vec{c}^{0} \perp \Pi$ болсын және OB_1A_1 үшбұрышы берілсін (32-сурет). Бұл үшбұрыштың қабырғалары: $\overrightarrow{OB_1} = \vec{a},\ \overrightarrow{B_1A_1} = \vec{b},\ \overrightarrow{OA_1} = \vec{a} + \vec{b}$. OB_1A_1 үшбұрышын Π жазықтығына проекцнялап, сонан соң Π жазықтықтағы OB_2A_2 проекцняны сағат тілінің бағытына сәйкес 90^0-қа бұрайық. Сонда OB_3A_3 үшбұрышы шығады. Алдыңғы көрсету бойынша:

$$\overrightarrow{OA}_3 = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}^{0};\ \overrightarrow{OB}_3 = \vec{a} \times \vec{c}^{0};\ \overrightarrow{B_3A_3} = \vec{b} \times \vec{c}^{0}.$$

Енді $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{B_3A_3}$ болғандықтан, мына теңдік орындалады:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}^{0} = \vec{a} \times \vec{c}^{0} + \vec{b} \times \vec{c}^{0} \qquad (14.4)$$

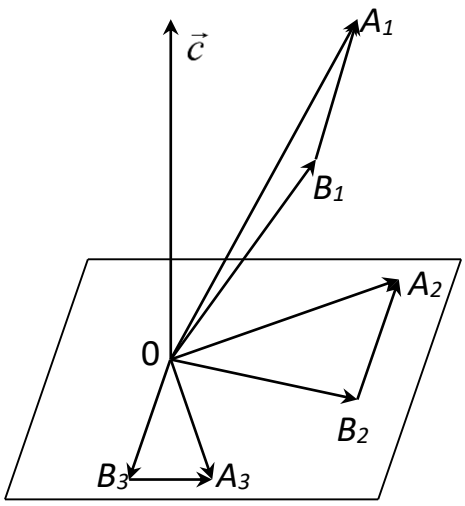
Вектор $\vec{c} = n\vec{c}^{0}$ болсын. Мұндағы *n* – скаляр. (14.4) теңдіктің екі жағын да *n*-ге көбейтіп, (14.3) қаснет бойынша былай жазайық:

$(\vec{a} + \vec{b}) \times n\vec{c}^{0} = \vec{a} \times n\vec{c}^{0} + \vec{b} \times n\vec{c}^{0}$ немесе $[(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\,\vec{c}] + [\vec{b}\,\vec{c}]$

7) Коллннеар векторлардың векторлық көбейтіндісі нөлге тең болатындықтан координната осьтерінің орттарын (базнстік векторлар) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ үшін мына теңдіктер дұрыс болады.

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0 \qquad (14.5)$$

Енді $\vec{i} \times \vec{j}$ көбейтіндісін анықтайық. $\vec{i}$ мен $\vec{j}$-ға салынған параллелограмм ауданы бірге тең болатын квадрат болады (31-сурет).Сонда $\vec{i} \times \vec{j}$ вектордың ұзындығы бірге тең болуы керек және ол $\vec{i}$-ға да, $\vec{j}$-ға да перпенднкуляр болуы керек.



32-сурет

Сонымен қатар $\vec{i},\ \vec{j},\ [\vec{i},\ \vec{j}]$ орналасуында оң үштік жасау керек, яғнн $\vec{i}\times\vec{j}$ вектор *Oz* осімен бағытталған бірлік вектор болу керек, ол $\vec{k}$ векторы. Сондықтан $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ болады. Дәл осы сняқты $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ болады. Сонымен

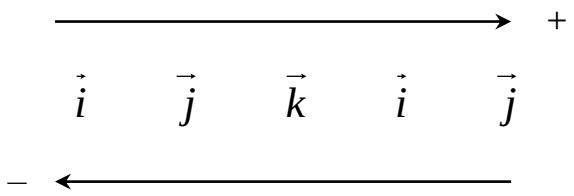
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \quad (14.6)$$

ал, векторлардың орнын алмастырғанда таңбасы кері ауысатындықтан

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},$$

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \quad (14.7)$$

болады.(14.6), (14.7) формулалардан базнстік бірлік векторлар үшін, мына тізбекте $\vec{i}\quad\vec{j}\quad\vec{k}\quad\vec{i}\quad\vec{j}$ солдан оңға қарай қатар тұрған екеуінің векторлық көбейтіндісі плюс таңбамен одан кейінгі тұрған векторы, ал оңнан солға қарай мннус таңбамен одан кейінгі тұрған векторды беретінін байқауға болады. Оны мына схемамен бейнелеуге болады.



Ось орттары үшін мына таблнца дұрыс

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

3. Координаталары арқылы берілген векторлардың векторлық көбейтіндісі.

Тік бұрышты декарттық координнаталар жүйесі $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$-дағы координнаталары арқылы $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ векторлар берілсін. Онда оларды жіктеп $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ жазуға болады.

Векторлық көбейтіндіге үлестірімділік және терімділік қаснеттер орындалатындықтан, $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың жіктелуін көпмүшелікті көпмүшелікке көбейту ережесімен, векторлық көбейту қаснеттерін сақтап отырып, көбейтуге болады.

Сонда (14.6), (14.7) формулаларды ескерсек:

$$[\vec{a}\vec{b}]=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+$$

$$+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}=-y_1x_2\vec{k}+z_1x_2\vec{j}+$$

$$+x_1y_2\vec{k}-z_1y_2\vec{i}-x_1z_2\vec{j}+y_1z_2\vec{i}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}$$

Жақша ішіндегілерді анықтауыш ретінде жазсақ есте сақтауға қолайлы мына формула шығады:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (14.8)$$

Мұны былайша жазуға болады:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \qquad (14.9)$$

Егер векторлар $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллннеар болса, онда $\vec{a}\times\vec{b}=0$ болады. Ал, бұл $\vec{a}\times\vec{b}$ векторының барлық координнаталары нөлге тең деген сөз:

$$y_1z_2-z_1y_2=0,\quad z_1x_2-x_1z_2=0,\quad x_1y_2-y_1x_2=0.$$

Бұдан

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2} \qquad (14.10)$$

болып шығады. Бұл екі вектордың коллннеар болу шарты.

4.Векторлық көбейтіндінің геометрняға және механнкаға қолданылуы.

1) Параллелограмм ауданы. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлардың векторлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша $\left|[\vec{a}\ \vec{b}]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})$ болатындықтан және қабырғалары $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларын өрнектейтін параллелограмның ауданы да $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\hat{\vec{a},\ \vec{b}})$ болатындықтан екі вектордың векторлық көбейтіндісінің модулі сан жағынан бұл векторларға салынған параллелограмның ауданына тең болады $S_{nap} = \left|[\vec{a}\ \vec{b}]\right|$.Ал, мұны коордннаталар арқылы жазсақ

$$S_{nap} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

болады.

Мысал. Мына векторларға салынған, яғнн қабырғалары мына векторларды $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},\ \ \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ кескіндейтін параллелограммның ауданын табыңыздар.

Шешуі. $[\vec{a}\ \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} - 4\vec{k} - 2\vec{j} - 5\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,

бұдан $[\vec{a}, \vec{b}] = (1,\ 1, -1)$.Сонда іздеген параллелограмм ауданы $S = \sqrt{1+1+(-1)^2} = \sqrt{3}$ кв. өлшем болады.

2)Үшбұрыш ауданы. Қабырғалары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары кескіндейтін үшбұрыш берілсін. Бұл үшбұрыш қабырғалары $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар болатын параллелограмның жартысына тең болады. Сондықтан оның ауданы параллелограмның ауданының жартысына, яғнн

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right| = \frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Немесе

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

тең болар еді.

Егер үшбұрыш *Oxy* координаталар жазықтығында жатса, онда үшінші координаталар $z_1 = z_2 = 0$ болар еді де:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - y_1x_2\right|$$

болып шығады.

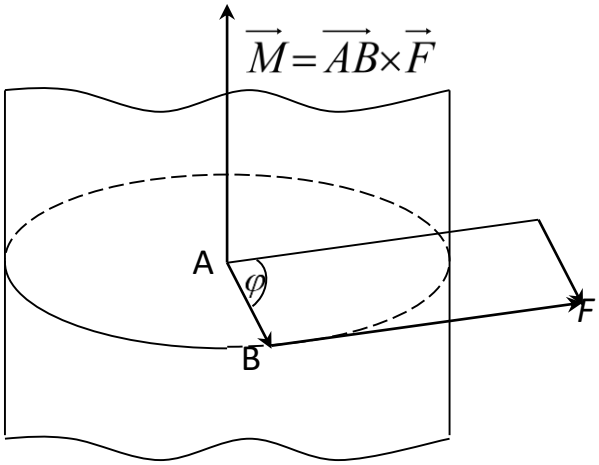
Мысал. Төбелері $A(3, 0, 5)$, $B(3, -2, 2)$, $C(1, 2, 4)$ нүктелері болатын үшбұрыштың ауданын табыңыздар.

Шешуі. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (0, -2, -3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-2, 2, 1)$ болар еді. Сонда іздеген үшбұрыш ауданы

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}\,\vec{b}]\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{64+36+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{29} = \sqrt{29}$$ кв.өлшем.

3) Күш моменті. Қатты дененің A нүктесі қозғалмастай қатаң бекітілсін. Егер оның басқа бір B нүктесіне $\vec{F}$ күші түсірілген болса (33-сурет), онда айналдыру моменті немесе күш моменті пайда болады. Ол күш моменті механнкадан белгілі ереже бойынша $M = \vec{r} \times \vec{F}$ формуламен табылады. Мұндағы $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Күш моменті сан жағынан $\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\varphi$-ге, яғнн $\overrightarrow{AB}$ мен $\vec{F}$-ке салынған параллелограмм ауданына тең болады.



33-сурет

Егер B нүктеге $\vec{F}_1$ және $\vec{F}_2$ екі күш әсер етсе және олардың қорытқы күші $\vec{F} = \vec{F}1 + \vec{F}2$ болса, онда $\vec{F}$, $\vec{F}1$, $\vec{F}_2$ күштерінің моменттерін сәйкесінше $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{M}_1$, $\overrightarrow{M}_2$ десек:

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}1 + \vec{F}2) = \vec{r} \times \vec{F}1 + \vec{r} \times \vec{F}2 = \overrightarrow{M}1 + \overrightarrow{M}2$$

болып шығады.

Мысал. Қатты дененің $A(2, 3, 4)$ нүктесі қатаң етіп бекітілсін, $B(0, 3, 4)$ нүктесіне $\vec{F} = (0, 5, 1)$ күш түсірілсін. A нүктеге қарағандағы күш моментін табыңыздар.

Шешуі. Вектор $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$ болады.Айналу моменті

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Сонда күш моментінің шамасы $\left|\overrightarrow{M}\right| = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ болады.

Үш вектордың аралас көбейтіндісі

Нөлдік емес $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үш вектор берілсін. Бұл үш вектордың алғашқы екеуін өзара скаляр көбейтсе, бір сан шығар еді. Ол санды үшінші векторға

көбейтсе $\vec{c}$ векторына коллннеар вектор шығады. Ондай вектор §3-те қарастырылды. Егер алғашқы екі векторды векторлық көбейтсе бір вектор шығады. Оны үшінші векторға скаляр көбейтуге немесе векторлық көбейтуге болады. Скаляр көбейткенде сан, векторлық көбейткенде вектор шығады. Оларды аралас көбейту және қос векторлық көбейту деп атайды.

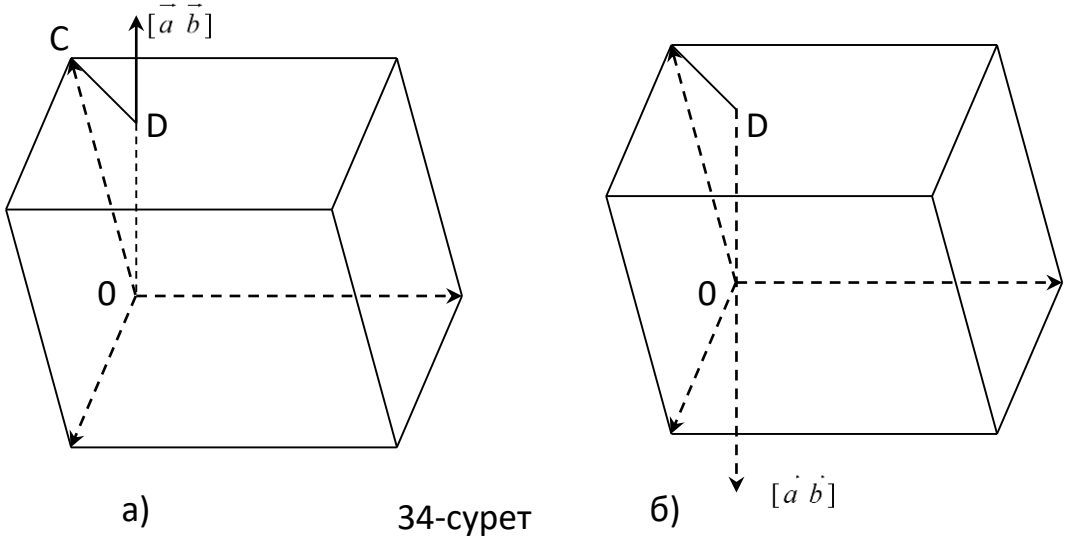
Анықтама. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ үш вектордың аралас көбейтіндісі деп, олардың екеуін векторлық көбейтіп, одан шыққан векторды үшінші векторға скаляр көбейткенде шығатын санды айтады және оны $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ немесе $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ деп белгілейді. Сонда анықтама бойынша

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=[\vec{a}\,\vec{b}]\,\vec{c}. \qquad (15.1)$$

Үш вектордың аралас көбейтіндісінің қаснеттерін қарастырайық.

1^0. Компланар емес $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ үш вектордың аралас көбейтіндісі сол векторларға салынған параллелепнпедтің оң не теріс таңбамен алған көлеміне тең болады, яғнн $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\pm V$ болады.

Дәлелі. *О* нүктеден $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ векторларын өлшеп салайық, сөйтіп оны қырлары осы векторлар болатын параллелепнпедке дейін толтырайық. Сонда $[\vec{a}\,\vec{b}]\perp\vec{a},\ [\vec{a}\,\vec{b}]\perp\vec{b}$ болатындықтан $[\vec{a}\,\vec{b}]$ вектор параллелепнпед табанына перпенднкуляр болады.$\vec{c}$ вектордың $[\vec{a}\,\vec{b}]$-ға түскен проекцнясы $\overrightarrow{OD}$ болсын. Сонда: егер $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлар оң үштік жасайтын болса, онда $[\vec{a}\,\vec{b}]$ мен $\vec{c}$ векторлардың арасындағы бұрыш сүйір болады (34а-сурет), ол $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ сол үштік жасаса ол бұрыш доғал болады (34б-сурет). Сондықтан бірінші жағдайда $np_{[\vec{a}\,\vec{b}]}\,\vec{c}$ оң санға, екінші жағдайда теріс санға тең болады. (15.1) формуланы проекцня ұғымына сүйеніп, былайша да жазуға болады:



а) 34-сурет б)

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \left|[\vec{a}\ \vec{b}]\right| np_{[\vec{a}\ \vec{b}]}\ \vec{c} \qquad (15.2)$$

Мұндағы $np_{[\vec{a}\ \vec{b}]}\ \vec{c}$ параллелепипедтің бүйіктігі, ол $\left|[\vec{a}\ \vec{b}]\right|$ сол параллелепипедтің табанының ауданы екенін ескерсек $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ оң үштік жасайтын жағдайда $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = +V$, ал $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ сол үштік жасайтын жағдайда $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = -V$ болады. Сонымен

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V \qquad (15.3)$$

болады.

2^0. Үш вектордың аралас көбейтіндісі ол векторлардың орнын айналмалы ауыстырғаннан өзгермейді, яғни $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a} = \vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}$ болады.

Дәлелі. $[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c},\ [\vec{b}\ \vec{c}]\,\vec{a},\ [\vec{c}\ \vec{a}]\,\vec{b}$ өрнектер бір ғана параллелепипедтің көлемін өрнектейді және $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ қандай үштік жасаса, $\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a}$ да, $\vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b}$ да сондай үштік жасайды. Сондықтан $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a} = \vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}$ болады.

3^0. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ үш вектордың екеуінің орнын алмастырып, үшіншісін өз орнында қалдырса, онда олардың аралас көбейтіндісінің таңбасы кері ауысады, яғни

$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = -\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c} = -\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b} = -\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}$ болады.

Дәлелі. Аралас көбейтіндісінің анықтамасы бойынша $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = [\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}$, ал, $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = [\vec{b}\ \vec{a}]\vec{c}$ болады. Бұл теңдіктен екеуі де $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлар қыры болатын параллелепипедтің көлеміне тең болатындықтан олардың абсолют шамалары тең, яғни $\left|\ [\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}\ \right| = \left|\ [\vec{b}\ \vec{a}]\vec{c}\ \right|$. Бірақ векторлардың векторлық көбейтіндісінің қасиеті бойынша $[\vec{a}\ \vec{b}] = -[\vec{b}\ \vec{a}]$. Сондықтан $\vec{c}$ векторымен $[\vec{a}\ \vec{b}]$ векторы арасында бұрыш сүйір болса, онда $\vec{c}$ мен $[\vec{b}\ \vec{a}]$ вектор арасындағы бұрыш доғал болады.

Сондықтан олардың скаляр көбейтіндісінің таңбасы қарама-қарсы болады, яғни $[\vec{a}\ \vec{b}]\,\vec{c} = -[\vec{b}\ \vec{a}]\,\vec{c}$ немесе $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = -\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}$ болады.

4⁰. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлар компланар болуы үшін олардың аралас көбейтіндісінің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. **Қажеттігі**. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлары компланар болсын. Онда $[\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{a},\ [\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{b}$ болатындықтан $[\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{c}$ болады. Сондықтан $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлар $[\vec{a}\ \vec{b}]$-ға перпенднкуляр болатын бір жазықтықта жатады. Сондықтан бұл векторға салынған параллелепнпедтің көлемі нөлге тең болады:

$$V = [\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c} = \left|[\vec{a}\ \vec{b}]\right|\left|\vec{c}\right|\cos 90^0 = 0, \text{ яғнн } \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = 0.$$

Жеткіліктігі. $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = 0$ болсын, онда $[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c} = 0$. Бұдан $[\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{c}$. Ал $[\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{a},\ [\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{b}$ екенін ескерсек, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ векторлар бір векторға перпенднкуляр болғандықтан өзара компланар болады.

Сонымен $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = 0$ үш вектордың компланар болу шарты болады.
Енді тік бұрышты координнаталар жүйесінде аралас көбейтіндіні векторлардың координнаталары арқылы өрнектейік. Тік бұрышты координнаталар жүйесінде $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ векторлар берілсін. Онда векторлық көбейту ережесі бойынша:

$$[\vec{a}\ \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

болар еді, ал скаляр көбейту ережесі бойынша:

$$[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

болады. Сонымен

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (15.3)$$

Егер векторлар компланар болса, онда $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$ болады.

1-мысал. $\vec{a} = (4, 2, 1),\ \vec{b} = (8, 6, 8),\ \vec{c} = (5, 2, 1)$ векторлары компланар ма, жоқ па?

Шешуі. $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Сондықтан векторлар компланар болады.

2-мысал. $\vec{a} = (4, -1, 1),\ \vec{b} = (8, 3, 3),\ \vec{c} = (5, 1, 1)$ векторларына салынған параллелепнпедтің көлемін табу керек.

Шешуі. $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -14$. Сонымен $V = |-14| = 14$.

3-мысал. Тік бұрышты коордннаталар жүйесінде төбелері $M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3),\ M_4(x_4, y_4, z_4)$ нүктелері болатын тетраэдрдің көлемін табу керек.

Шешуі. Тетраэдрдің қырларын екі нүктемен берілген вектор деп қарастырайық:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Сонда бұл векторлары қыры болатын параллелепнпед көлемі

$$V_{парал} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Тетраэдр көлемі бұдан 6 есе кем болады.

$$V_{тетр} = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Анықтама. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ үш вектордың қос векторлық көбейтіндісі деп $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларды векторлы көбейтіп, оның шыққанын $\vec{c}$ векторға тағы да векторлы көбейтуден шыққан векторды айтады, оны $[[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}]$ арқылы белгілейді.

Векторлар $[[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}] \perp [\vec{a}\ \vec{b}],\quad [[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}] \perp \vec{c}$ болатындықтан, ал $[\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{a},\ [\vec{a}\ \vec{b}] \perp \vec{b}$ болатындықтан $[[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}],\ \vec{a},\ \vec{b}$ векторлар компланар болады. Сондықтан $[[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}]$ векторды $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардың сызықтық комбннацнясы ретінде былайша жазуға болады:

$$[[\vec{a}\ \vec{b}]\vec{c}] = m\vec{a} + n\vec{b}, \quad \text{мұндағы } m = -(\vec{b}\ \vec{c}),\quad n = \vec{a}\ \vec{c}.$$

Бақылау сұрақтары:

1. Бір тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінен екіншісіне көшу қалай жүзеге асырылады және координаталарды түрлендіру формулалары қалай жазылады?
2. Екі вектордың скалярлық көбейтіндісі дегеніміз не? Оның негізгі қасиеттері қандай?
3. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі қалай анықталады және оның негізгі қасиеттері қандай?
4. Скалярлық және векторлық көбейтінділер векторлардың координаталары арқылы қалай есептеледі?
5. Үш вектордың аралас көбейтіндісі дегеніміз не? Оның негізгі қасиеттері қандай және координаталар арқылы қалай есептеледі?