5-дәріс. Декарттық координаталар жүйесі. Векторлардың осьтегі проекциясы және оның қасиеттері
6-дәріс. Полярлық координаталар жүйесі.

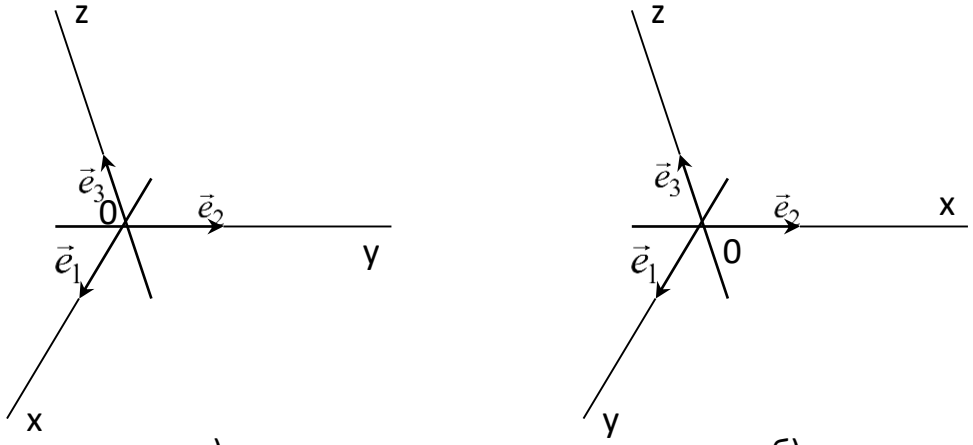
Дәріс жоспары:

1. Декарттық координаталар жүйесі. Жазықтықтағы және кеңістіктегі нүктенің координаталары.
2. Вектордың координаталық осьтегі проекциясы және оның негізгі қасиеттері.
3. Полярлық координаталар жүйесі. Полярлық радиус және полярлық бұрыш.
4. Полярлық және декарттық координаталар арасындағы байланыс. Бір координаталар жүйесінен екіншісіне көшу формулалары.

Декарттық координаталар жүйесі

Кеңістіктен кез-келген бір *O* нүкте және оң базис ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) алайық. Бұл базистік векторлар *O* нүктеден шығатындай болып орналассын.

Анықтама. *O* нүкте және ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) базистен тұратын геометриялық бейнені кеңістіктегі декарттық координаталар жүйесі дейді (12-сурет). *O* – координаталар жүйесінің басы, $\vec{e}_1$- бірінші, $\vec{e}_2$- екінші, $\vec{e}_3$- үшінші **координаталық векторлар (немесе орттар)** делінеді. Бұл векторларды бастыра жүргізілген бағытталған түзулерді **координаталық осьтер** дейді. Оның ішінде оң бағыты $\vec{e}_1$-мен анықталатынын **абсцисса** осі дейді де *x* -пен, $\vec{e}_2$ бағытымен анықталатынын **ордината** осі дейді де *y* -пен, $\vec{e}_3$ бағытымен анықталатынын **аппликата** осі дейді де *z* -пен белгілейді. Бұл осьтерді қос-қостан басып өтетін *Oxy, Oxz, Oyz* жазықтықтарын координата жазықтықтары дейді. Координаталар жүйесін *Oxyz* немесе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ арқылы белгілейді. Базистің оң, сол болуына сәйкес декарттық координаталар жүйесі де оң (12а-сурет), сол (12б-сурет) болады. Біз тек оң координаталар жүйесін қарастыратын боламыз.



а) б)

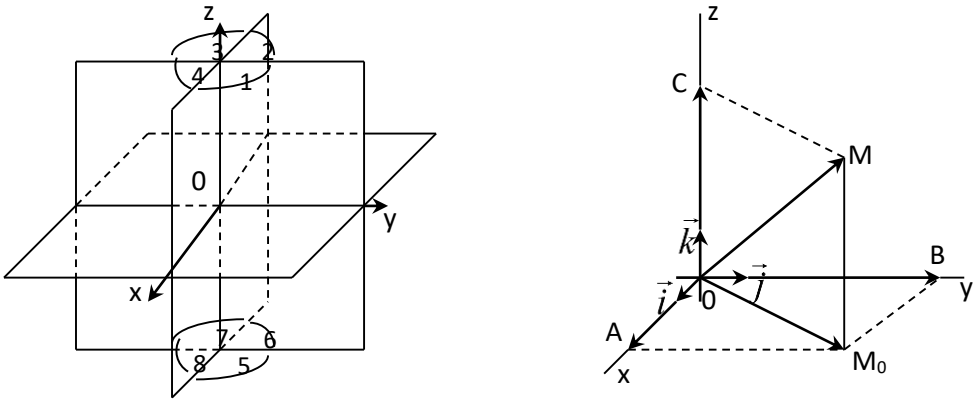
12-сурет

Егер базистік векторлар қос-қостан өзара перпендикуляр бірлік векторлар болса, онда координаталар жүйесі тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі делінеді, ондай болмаса жалпы декарттық координаталар жүйесі немесе аффиндік координаталар жүйесі делінеді. Біз негізінен тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін қарастырамыз. Әдетте, тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінің базисін (координаттық векторларын) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ арқылы белгілейді. Координата жазықтықтары өзара қиылысып, кеңістікті 8-ге бөледі, оларды октанта дейді (13а-сурет). *Ox, Oy, Oz* сәулелерінің үшеуі де оң болатын октантаны бірінші октанта дейді, қалғандарын одан сағат тілі қозғалысы бағытына кері бағытта нөмірлейді. 1, 2, 3, 4 октантаның төменгі жағындағы октанталар сәйкесінше 5, 6, 7, 8 – октанталар болады.

Кеңістікте $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ тік бұрышты декарттық координаталар жүйесі және *M* нүктесі берілсін (13б-сурет). Онда $\overrightarrow{OM}$ векторы *M* нүктенің **радиус-векторы** делінеді және ол базистік векторларға бір түрде ғана жіктеледі:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Бұл жіктелудегі *x, y, z* коэффициенттер $\overrightarrow{OM}$ векторының координаттары болады: $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$. Кеңістікте *M* нүкте мен оның радиус векторы $\overrightarrow{OM}$ арасында бірмәнді сәйкестік болады. Сондықтан $\overrightarrow{OM}$ векторының координаттарын *M* нүктесінің координаталары үшін алуға болады.



а) б)

13-сурет

Анықтама.Тік бұрышты декарттық координаталар жүйесінде *M* нүктенің декарттық координаталары деп, ол нүктенің радиус-векторы $\overrightarrow{OM}$ -нің $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ базистегі координаталарын айтады.

Егер $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ болса, онда *M* нүктенің координаталары *x, y, z* болады және ол $M(x, y, z)$ деп белгіленеді. Нүктенің қай октантада жатуына сәйкес, оның координаталарының таңбалары да әртүрлі болады. Ол таңбалар $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ бағытталған кесінділердің бағыттарының сәйкесінше $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторларымен бағыттас немесе қарама-қарсы бағытта болуына байланысты анықталады. Нүкте координаталарының таңбасы октанта бойынша былай болады:

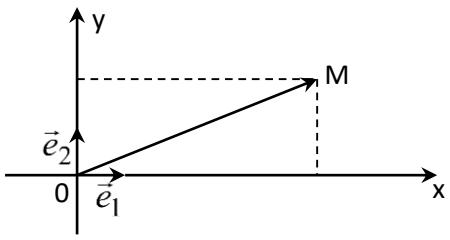
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	–	–	+	+	–	–	+
Y	+	+	–	–	+	+	–	–
Z	+	+	+	+	–	–	–	–

Егер *M* нүктенің координаталары (x, y, z) белгілі болса, онда *M* нүктенің кеңістіктегі орнын анықтау үшін $x\vec{i}$ векторды *O* нүктеден бастап абсцисса осіне, $y\vec{j}$ векторды ордината осіне, $z\vec{k}$ векторды аппликата осіне өлшеп салып, *A, B, C* нүктелерді табамыз (13б-сурет). *A* мен *B* нүктелерден *Ox, Oy* осьтеріне параллель түзулер жүргізіп, олардың қиылысу нүктесі M_0 нүктені табамыз. Ол нүктеден *Oz* осіне, ал *C* нүктеден OM_0 -ға параллель түзулер жүргізіп, олардың қиылысуынан ізделген *M* нүктесін табамыз.

Жазықтықтағы декарттық координаталар жүйесі кеңістіктегідей анықталады.

Жазықтықтағы декарттық координаталар жүйесі деп *O* нүкте мен $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базистен тұратын геометриялық бейнені айтады (14-сурет). Бұл кезде x осі мен *y* осі жазықтықты төртке бөледі. Оларды **ширектер** дейді. Бұл кезде *M* нүктенің екі координаталары болады, ол $M(x, y)$ арқылы белгіленеді. Сөйтіп

$$M(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$



14-сурет

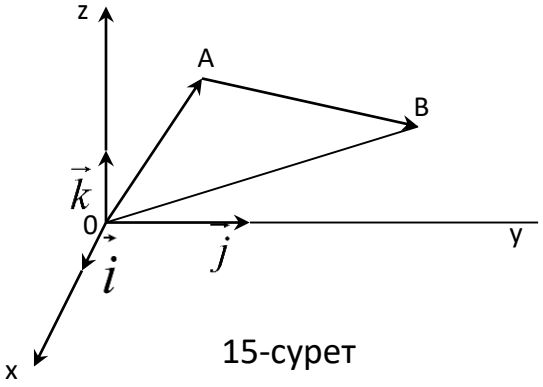
Енді тік бұрышты декарт координаталар жүйесінде аналитикалық геометрияның кейбір қарапайым есептерін шешу жолдарын қарастырайық.

1-есеп. Тік бұрышты $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ декарт координаталар жүйесіндегі координаталары арқылы $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген. Осы нүктелер арқылы анықталатын $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табу керек.

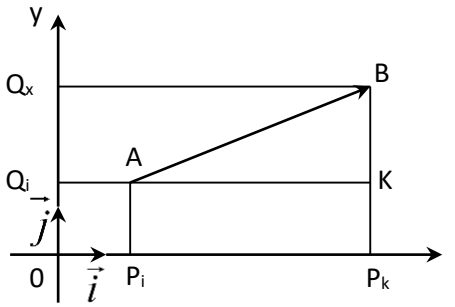
Шешуі. Векторларды азайту ережесі бойынша (15-сурет)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \qquad (*)$$

$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ векторлары – *B* және *A* нүктелерінің радиус-векторлары, демек, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2),\ \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$. Бұларды (*) формулаға қойып, координаталармен берілген векторларға амалдар қолдану ережелері бойынша мынаны табамыз. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ яғни, $\overrightarrow{AB}$ векторының координаталарын табу үшін, оның ұшының координаталарынан бас нүктесінің сәйкес координаталарын шегеру жеткілікті.



15-сурет



16-сурет

2-есеп. Екі нүктенің ара қашықтығын табу керек.

Шешуі. Мектептің геометрия курсынан координаталық (ось) түзу бойында орналасқан *A* мен *B* нүктелерінің ара қашықтығы $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |x_2 - x_1|$ формуласымен есептелетіні белгілі, мұндағы x_1, x_2 - *A* мен *B* нүктелерінің координаталары.

Енді $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ жазықтықтың тік бұрышты координаталар жүйесінде берілген кез-келген екі нүкте болсын. Олардың ара қашықтығын табайық.

A мен *B* нүктелері арқылы тік бұрышты координаталар жүйесінің осьтеріне параллель түзулер жүргізіп, қажетті белгілеулер енгізейік (16-сурет). Тік

бұрышты үшбұрышынан Пифагор теоремасы бойынша мына теңдікті табамыз.

$$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2 \qquad (**)$$

(*) формула бойынша $|AK| = |x_2 - x_1|,\ |KB| = |y_2 - y_1|$. Бұларды (**) формулаға қойып, мынаны табамыз.

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Сонымен, жазықтықтағы екі нүктенің ара қашықтығын есептеу үшін $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ формула табылады.

Осы сияқты, қырлары координаталық осьтерге параллель болып, ал диагоналы *AB* болатын тік бұрышты параллелепипедке Пифагор теоремасын қолдана отырып, кеңістіктің $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ екі нүктесінің ара қашықтығы үшін мына формуланы шығарып аламыз

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (9.1)$$

3-есеп. Тік бұрышты координаталар жүйесінде координаталар арқылы $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері берілген. *AB* кесіндісін λ қатынаста бөлетін *C* нүктесінің координаталарын табу керек.

Шешуі. $\overrightarrow{AB}$ бағытталған кесіндісі *C* нүктесі λ қатынаста бөледі дейді, егер $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ болса. Егер *C* нүктенің координаталарын (x, y, z) десек, онда вектор координаталарының қасиеттері бойынша және 1-есепті ескерсек, соңғы теңдіктен

$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$ болар еді. Бұдан

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (9.2)$$

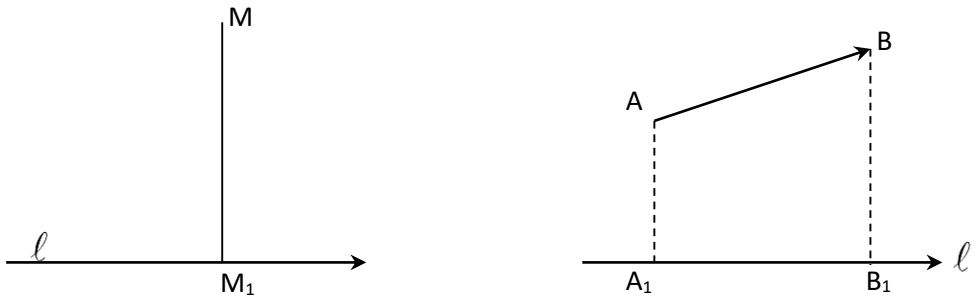
Бұл кесіндіні берілген қатынаста бөлу формуласы делінеді, мұндағы $\lambda \neq -1$ болу керек. Егер *C* нүкте *A* мен *B* нүктелердің арасында жатса, онда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$-дан $\lambda > 0$ болады, бұл кезде *C* нүкте *AB* кесіндіні іштей бөледі делінеді. Егер *C* нүкте *AB* кесіндісінің созындысында жатса, онда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$ -дан $\lambda < 0$ болады, бұл кезде *C* нүкте *AB* кесіндіні сырттай бөледі делінеді. Егер *C* нүкте *AB* кесіндісінің қақ ортасында жатса, онда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$-дан $\lambda = 1$ болады да, (9.2)-формула мына түрге келеді.

$$x=\frac{(x_1+x_2)}{2},\ y=\frac{(y_1+y_2)}{2},\ z=\frac{(z_1+z_2)}{2}. \qquad (9.3)$$

Мұны кесіндіні қақ бөлу формуласы дейді.

Векторлардың осьтегі проекциясы және оның қасиеттері

Оң бағыты белгілі түзуді **ось** дейді. Осьтің бағыты өзіне параллель векторлардың бірімен толық анықталады. Ол әдетте бірлік вектор арқылы беріледі, ол бірлік векторды осьтің орты деп те атайды.



а) б)

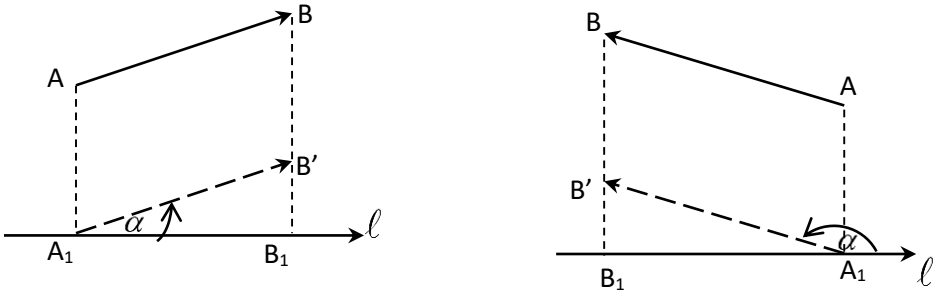
17-сурет

M нүктесі мен ℓ (оның оң бағыты бірлік вектор $\vec{e}$ арқылы берілсін) осі берілсін. M нүктесінің ℓ осіндегі проекциясы деп, M нүктеден ℓ осіне жүргізілген перпендикулярдың табанын айтады (17а-сурет). $\overrightarrow{AB}$ векторы мен ℓ осі берілсін. A және B нүктелерден ℓ осіне перпендикуляр түсірейік, олардың табандары A_1, B_1 болсын (17б-сурет).

Анықтама. $\overrightarrow{AB}$ векторының ℓ осіндегі проекциясы деп, ол вектордың ұштарының осьтегі проекцияларымен шектелген $\overrightarrow{A_1B_1}$ бағытталған кесіндінің, егер оның бағыты осьпен бағыттас болғанда плюс таңбамен, ал қарама-қарсы болғанда минус таңбамен алынатын ұзындығын айтады.

$\overrightarrow{AB}$ векторының ℓ осіндегі проекциясын былайша $np_\ell \overrightarrow{AB}$ жазады. Сонда анықтама бойынша $np_\ell \overrightarrow{AB}=\pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ болады.

$\overrightarrow{AB}$ вектор мен ℓ осі арасындағы оң бұрыш деп ℓ осін өзінің бір нүктесімен (мысалы A нүктенің осьтегі проекциясы A_1 нүктеден) сағат тілі қозғалысы бағытына кері бағытта бұрып, оны $\overrightarrow{AB}$ векторға параллель етуге не онымен беттестіруге қажетті бұрышты айтады. 18а-суретте $\overrightarrow{AB}$ вектор мен ℓ осі арасындағы бұрыш B_1A_1B' сүйір, ал 18б-суретте доғал. Жалпы вектор мен ось арасындағы α бұрыштың өзгеру облысы $0\le\alpha\le180^0$ болады.



а) б)

18-сурет

Вектордың осьтегі проекциясының қасиеттерін сипаттайтын тұжырымдарды дәлелдейік.

1-теорема. $\overrightarrow{AB}$ векторының ℓ осіндегі проекциясы сол вектордың модулі мен вектордың ℓ осімен жасайтын бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең, яғни $np_{\ell}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha$ болады. Мұндағы $\alpha = (\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\vec{\ell})$.

Дәлелі. Үш жағдайды қарастырайық.

1^0. $\overrightarrow{AB} \perp \ell$. Бұл кезде $\overrightarrow{AB}$-ның ℓ осіндегі проекциясы нөлге тең болады. Себебі 90^0-та косинус нөлге тең. Сөйтіп, теорема бірінші жағдай үшін дұрыс.

2^0. $\overrightarrow{AB}$ вектор ℓ осімен сүйір бұрыш жасасын (18а-сурет).

$\Delta A_1B'B_1$-ден $A_1B_1 = np_{\ell}\overrightarrow{AB} = \left|A_1B'\right|\cos\alpha = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha$.

3^0. $\overrightarrow{AB}$ вектор ℓ осімен доғал бұрыш жасасын (18б-сурет).

$\Delta A_1BB'$-тен $np_{\ell}\overrightarrow{AB} = -\left|A_1B_1\right| = -\left|\overrightarrow{A_1B'}\right|\cos(180^0 - \alpha) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha$.

Салдар. Егер $\overrightarrow{AB}$ бірлік вектор болса, онда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1$ болғандықтан $np_{\ell}\overrightarrow{AB} = \cos\alpha$ болады.

2-теорема. Вектор мен санның көбейтіндісінің осьтегі проекциясы ол вектордың осьтегі проекциясын сол санға көбейткенге тең болады, яғни вектор бір санға көбейтілсе, вектордың проекциясы да сол санға көбейтіледі.

Дәлелі. $np_{\ell}\lambda\overrightarrow{AB} = \lambda np_{\ell}\overrightarrow{AB}$ екенін дәлелдеуіміз керек. $\overrightarrow{AB}$ векторы мен ℓ осінің арасындағы бұрыш α болсын. Үш түрлі жағдай болуы мүмкін.

1⁰. $\lambda = 0$ болсын. Онда $\lambda \cdot \overline{AB} = 0 \cdot \overline{AB} = \vec{0}$ болады. Нөлдік вектордың проекциясы нөл болады, яғни $np_\ell(\lambda \overline{AB}) = np_\ell \vec{0} = 0$, сондықтан $np_\ell \lambda \overline{AB} = \left|\lambda \overline{AB}\right| \cos\alpha = \lambda np_\ell \overline{AB}$.

2⁰. $\lambda > 0$ болсын. Бұл жағдайда $\overline{AB}$ және $\lambda \overline{AB}$ векторлары бағыттас. Олай болса, олардың әрқайсысы ℓ осімен α бұрыш жасайды. Сондықтан 1-теорема бойынша $np_\ell(\lambda \overline{AB}) = \left|\lambda \overline{AB}\right| \cos\alpha = \lambda \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha = \lambda np_\ell \overline{AB}$ болып шығады.

3⁰. $\lambda < 0$ болсын. Бұл кезде $\overrightarrow{AB}$ векторы ℓ осімен α бұрышын жасаса, $\lambda \overrightarrow{AB}$ векторы ℓ осімен $\pi - \alpha$ бұрыш жасайды. Сонда 1-теорема бойынша

$$np_\ell(\lambda \overline{AB}) = \left|\lambda \overline{AB}\right| \cos(\pi - \alpha) = -\lambda \left|\overline{AB}\right| (-\cos\alpha) = \lambda \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha = \lambda np_\ell \overline{AB}$$

болып шығады.

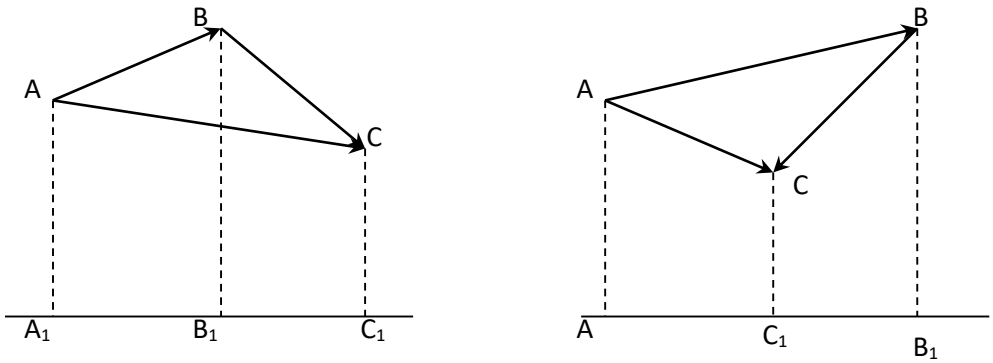
3-теорема. Векторлардың қосындысының осьтегі проекциясы қосылғыш векторлардың осы осьтегі проекцияларының қосындысына тең.

Дәлелі. Екі вектордың қосындысын $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ қарастырайық.

A, B, C нүктелерінің осьтегі проекциялары A_1, B_1, C_1 болсын. A_1, B_1, C_1 нүктелер ось бойында 6 түрде орналасуы мүмкін:

1) A_1, B_1, C_1 2) A_1, C_1, B_1 3) B_1, A_1, C_1

4) B_1, C_1, A_1 5) C_1, A_1, B_1 6) C_1, B_1, A_1



а) б)

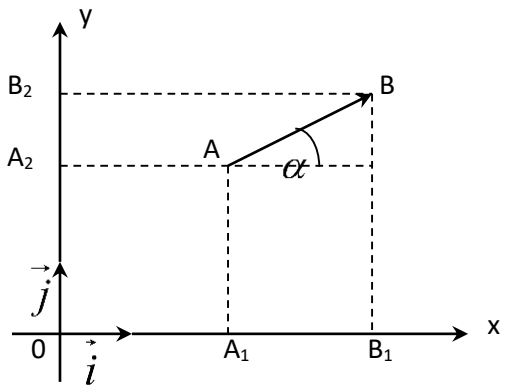
19-сурет

1-жағдайда (19а-сурет): $np_\ell(\overline{AB}+\overline{BC}) = np_\ell \overline{AC} = A_1C_1$ және $np_\ell \overline{AB} + np_\ell \overline{BC} = A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ болатындықтан $np_\ell(\overline{AB}+\overline{BC}) = np_\ell \overline{AB} + np_\ell \overline{BC}$ болады.

2-жағдайда (19б-сурет): $np_\ell(\overline{AB}+\overline{BC}) = np_\ell \overline{AC} = A_1C_1$ және $np_\ell \overline{AB} - np_\ell \overline{BC} = A_1B_1 - B_1C_1 = A_1C_1$ болатындықтан бұл жағдайда да $np_\ell(\overline{AB}+\overline{BC}) = np_\ell \overline{AB} + np_\ell \overline{BC}$ болады.

Қалған жағдайларында осылай дәлелденіледі. Бұл теореманы кез-келген санды қосылғыш векторларға жалпылауға болады.

Енді вектордың координаталар осіндегі проекциясын қарастырайық. Жазықтықта тік бұрышты *Oxy* координаталар жүйесі берілсін. Бұл координаталар жүйесінде $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ нүктелер берілсе, онда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ болар еді. Вектор $\overrightarrow{AB}$-ның *Ox* осіндегі проекциясы $\overrightarrow{A_1B_1}$, *Oy* осіндегі проекциясы $\overrightarrow{A_2B_2}$ бағытталған кесінділері болады және олар $\overrightarrow{A_1B_1} = x_2 - x_1,\ \overrightarrow{A_2B_2} = y_2 - y_1$ болады (20-сурет).



20-сурет

Егер $\overrightarrow{AB}$ векторы *Ox* осімен α бұрыш жасаса, онда *Oy* осімен: $\alpha - 90^0$ бұрыш жасар еді. Сонда

$np_x \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha,\ np_y \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos(\alpha - 90^0) = \left|\overline{AB}\right| \sin\alpha$. Сонымен

$$np_x \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cos\alpha,\ np_y \overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \sin\alpha \qquad (10.1)$$

Ал, бағытталған $\overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{A_2B_2}$ кесінділердің шамасы сәйкесінше, $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1$ екенін ескерсек

$$
\begin{aligned}
&np_x\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right|\cos\alpha = x_2 - x_1,\\
&np_y\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right|\sin\alpha = y_2 - y_1,
\end{aligned}
\qquad (10.2)
$$

болып шығады.

Мысал. Тік бұрышты координаталар жүйесінде үшбұрыштың төбелері $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ берілсін. Үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі. $\overrightarrow{AB}$ вектор *Ox* осімен α_1, $\overrightarrow{AC}$ векторымен α_2 бұрыш жасасын, $\angle A = \varphi$ дейік (21-сурет). Сонда

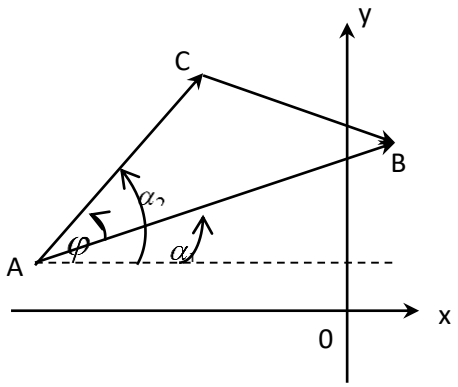
$$
S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\varphi = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin(\alpha_2 - \alpha_1) =
$$

$$
= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|(\sin\alpha_2\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) = \frac{1}{2}[\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha_1 \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\alpha_2 -
$$

$$
- \left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha_2 \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|\sin\alpha_1] = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] =
$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.
$$

Сонымен үшбұрыштың ауданы төбесінің координаталары арқылы



21-сурет

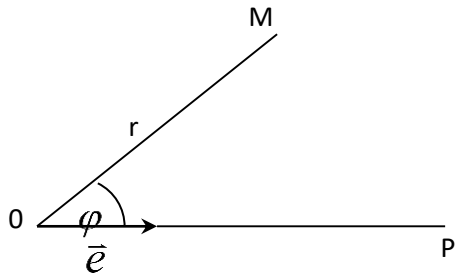
мына формуламен анықталады екен:

$$
S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (10.3)
$$

Полярлық координаталар жүйесі

Нүктенің жазықтықтағы орнын анықтау үшін жоғарыда баяндалған тік бұрышты декарт координаталар жүйесінен басқа полярлық координаталар жүйесі жиі қолданылады.

Жазықтықта O нүкте және бірлік вектор $\vec{e}$ берілсін (22-сурет).



22-сурет

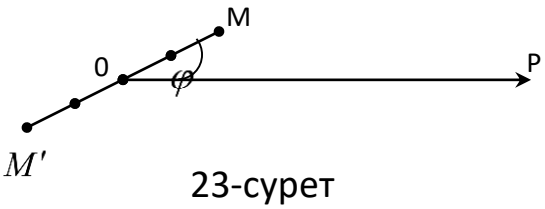
O нүкте мен $\vec{e}$ бірлік вектордан тұратын геометриялық бейнені жазықтықтағы полярлық координаталар жүйесі дейді. O нүктені полюс, оң бағыты $\vec{e}$ вектормен анықталатын және оны бастыра жүргізілген бағытталған жарты түзуді (сәулені) поляр осі дейді. Оны P-мен белгілейді. Осы жүйе арқылы жазықтықтың кез-келген нүктесіне нақты екі санды сәйкестіруге болады. Жазықтықтан M нүкте алайық. Оның полюстен қашықтығы $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r$ болсын, $\vec{e}$-ден $\overrightarrow{OM}$-ге дейінгі бұрышты φ дейік. Сонда M нүктеге бір пар ғана r, φ сандары сай келеді, M нүктенің орны өзгерсе r, φ сандары да өзгереді. Керісінше әрбір r, φ пар санына бір ғана M нүктесі сай келеді. Сондықтан r, φ сандарын M нүктенің $O\vec{e}$ полярлық координаталар жүйесіндегі полярлық координаталары дейді де, $M(r,\varphi)$ деп жазады. Мұндағы, r – нүктенің полярлық радиусы, φ – полярлық бұрышы делінеді.

Егер M нүкте полюс O-мен беттессе, онда $r = 0$, ал φ анықталмаған болады. OM түзуінің бойындағы барлық нүктелер үшін φ тұрақты болады, ал поляр осі P бойында жататын нүктелер үшін $\varphi = 0$ болады.

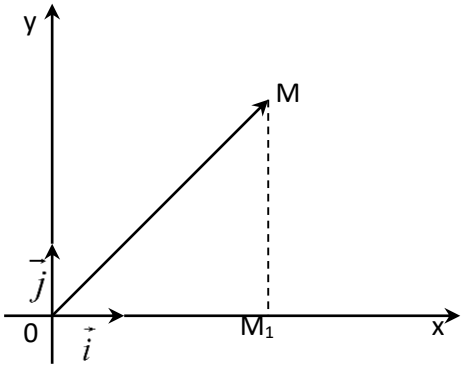
Егер M нүктенің полярлық бұрышы φ болса, онда $\varphi \pm 2k\pi$ бұрышта сол нүктенің полярлық бұрышы болады. Мына шартты $-\pi < \varphi \le \pi$ қанағаттандыратын φ-дың мәндерін басты полярлық бұрыш дейді. Сонымен r саны O-мен шексіз арасында, φ бұрышы -180^0 пен 180^0 арасында өзгереді.

Жазықтықтың кез-келген нүктесінің полярлық координаталары нақты сандар болады, бірақ кез-келген екі нақты сан нүктенің полярлық координатасы бола алмайды, өйткені анықтама бойынша $r \ge 0$ болуы керек.

Бұл бірқатар қолайсыздыққа алып келеді. Ол қолайсыздықты жою үшін кез-келген нақты сан полярдық координаталар болатындай етіп, полярлық координатаны былайша жалпылайды: (r, φ) кез-келген нақты сандар болсын. Егер $r \geq 0$ болса, онда ол $M(r,\varphi)$ нүктені анықтайды, ал $r < 0$ болса, онда ол $M(|r|,\varphi)$ нүктеге полюске қарағанда симметриялы болатын M' нүктені анықтайды деп аламыз (23-сурет). Полярлық координатаны осылайша жалпылау нәтижесінде енді кез-келген екі нақты сан нүктенің полярлық координатасы болатын болады. Мұны жалпыланған полярлық координата дейді, M' нүктенің полярлық координаталарын $(-r, \varphi)$ деуге де, $(r, -(180^0 - \varphi))$ деуге де болады.



23-сурет



24-сурет

Жазықтықтағы нүктенің полярлық координатасы мен декарттық координатасы арасындағы байланысты анықтайық. $O\vec{i}$ полярлық координаталар жүйесіндегі *M* нүктенің координаталары (r, φ) болсын. $O\vec{i}$ полярлық координаталар жүйесінде $O\vec{i}\vec{j}$ тік бұрышты декарттық координаталар жүйесін былайша толықтырайық (24-сурет): полярлық *P* осьті абсцисса осі үшін, полюсті координаталар жүйесінің бас нүктесі үшін алайық. Сонда шыққан тік бұрышты координаталар жүйесінде *M* нүктенің координаталары (x, y) болсын. Сонда ΔOMM_1-ден

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad (11.1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (11.2)$$

болар еді. (11.1) формуласы нүктенің полярлық координатасынан декарттық координатасына көшу, (11.2) формуласы, керісінше, декарттық координатасынан полярлық координатасына көшу формулалары.

1-мысал. $M(-1, \sqrt{3})$ нүктенің полярлық координаталарын табу керек.

Шешуі. (11.2) формула бойынша:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2, \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

болады. Бұдан $\varphi = 120^0$. Сондықтан $M(2, 120^0)$.

2-мысал. $M(4, 135^0)$ нүктенің тік бұрышты декарттық координаталарын табу керек.

Шешуі. (11.1) формула бойынша:

$$x = 4\cos 135^0 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -2\sqrt{2}, \quad y = 4\sin 135^0 = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

болады. Сонымен $M(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Декарттық координаталар жүйесі дегеніміз не және жазықтықтағы, кеңістіктегі нүктенің координаталары қалай анықталады?
2. Вектордың осьтегі проекциясы дегеніміз не және ол қалай есептеледі?
3. Векторлардың осьтегі проекцияларының негізгі қасиеттері қандай?
4. Полярлық координаталар жүйесі дегеніміз не? Полярлық радиус пен полярлық бұрыш қалай анықталады?
5. Полярлық координаталардан декарттық координаталарға және керісінше көшу формулалары қалай жазылады?