3-дәріс. Кеңістікте векторды компланар емес үш векторға жіктеу. Кеңістіктегі базис
4-дәріс. Координаталарымен берілген векторларға амалдар қолдану

Дәріс жоспары:

1. Компланар және компланар емес векторлар. Кеңістіктегі векторды компланар емес үш векторға жіктеу.
2. Кеңістіктегі базис ұғымы және вектордың базистегі координаталары.
3. Координаталарымен берілген векторларды қосу, азайту және санға көбейту.
4. Векторлардың теңдік және коллинеарлық шарттарын координаталар арқылы өрнектеу.

Кеңістікте векторды компланар емес үш векторға жіктеу. Кеңістіктегі базис

Теорема. Кеңістіктің кез-келген $\vec{a}$ векторын өзара компланар емес $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторларға жіктеуге болады және ол жіктеу біреу ғана болады.

Дәлелі. Векторлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ компланар болмасын, онда олар сызықтық тәуелсіз болады. Ал, $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ төрт вектор §5-тағы 3-теорема бойынша сызықтық тәуелді болады. Сондықтан қатарынан нөлге тең болмайтын x, y, z сандары табылып, $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ теңдігі орындалуы керек, яғни кеңістіктің кез-келген $\vec{a}$ векторы компланар емес $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларға жіктеледі.

Енді мұндай жіктелудің жалғыздығын дәлелдейік. Кері жориық, $\vec{a}$ векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларға былайша да $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$ жіктеледі дейік. Бұл екі жіктелуден

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$$

болар еді

$$(x - x_1)\vec{e}_1 + (y - y_1)\vec{e}_2 + (z - z_1)\vec{e}_3 = 0$$

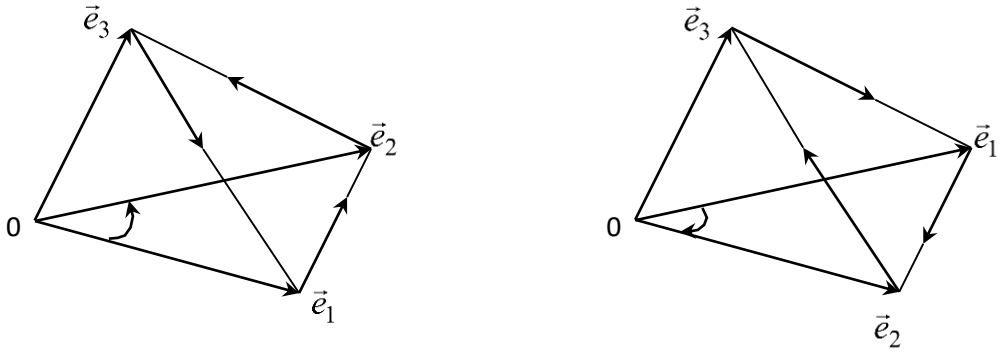
теңдеуін табамыз. Теореманың шарты бойынша $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар компланар емес, сондықтан олар сызықтық тәуелсіз векторлар. Осыған байланысты, соңғы теңдік $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$ және $z - z_1 = 0$, яғни $x = x_1$, $y = y_1$ және $z = z_1$ болғанда ғана орындалады. Сөйтіп, $\vec{a}$ векторы

компланар емес $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлары бойынша екі түрде жіктеледі деуіміз дұрыс емес. Басқаша айтқанда $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ теңдігі бірмәнді орындалады.

Анықтама. Кеңістіктің базисі деп, оның белгілі ретте алынатын өзара компланар емес кез-келген үш векторын айтады.

Компланар емес үш векторды кеңістіктен еркін алуға болатындықтан кеңістіктің базисі шексіз көп болады. Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар кеңістіктің базисін құраса, онда $\vec{e}_1$-ді бірінші, $\vec{e}_2$-ні екінші, $\vec{e}_3$-ті үшінші базистік векторлар дейді. Олардың ретінің шешуші мәні бар: ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) пен ($\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$) әртүрлі базистер болады.

Кеңістіктің кез-келген *O* нүктесінен базистік $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар өлшеп салынсын (11-сурет). Сонда *O* нүктеден қарағанда $\vec{e}_1$-дің ұшынан $\vec{e}_2$-нің ұшына, одан $\vec{e}_3$-тің ұшына жүру жолының бағыты сағат тілінің қозғалысы бағытына кері болса, базис оң базис (11а-сурет), сағат тілі қозғалысы бағытындай болса, сол базис (11б-сурет) делінеді. Біз тек оң базисті пайдаланамыз.



а) б)

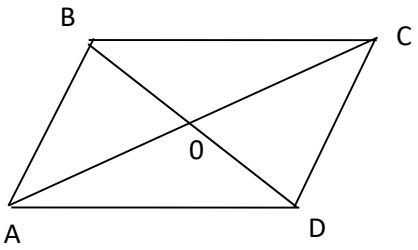
11-сурет

Анықтама.Кеңістіктегі $\vec{a}$ векторының ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) базисіндегі координаталары деп, оның бұл базистік векторларға жіктеуіндегі коэффициенттері x, y, z сандарын айтады және оны былайша $\vec{a} = (x, y, z)$ жазады. Анықтама бойынша

$$\vec{a} = (x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

1-мысал. *ABCD* параллелограмм, *O* диагоналдарының қиылысу нүктесі $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_1,\ \overrightarrow{OC} = \vec{e}_2$ базистік векторлар деп алып, параллелограмның қабырғалары мен диагоналдары кескіндейтін вектордың координаталарын табыңыздар.

Шешуі. Есепті шешу үшін параллелограмм қабырғалары мен диагоналдарын $\overrightarrow{OB}$ және $\overrightarrow{OC}$ векторларға жіктей жазуымыз керек. Δ*OBC*-дан $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -1 \cdot \overrightarrow{OB} + 1 \cdot \overrightarrow{OC} = -1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2$. Бұдан $\overrightarrow{BC} = (-1, 1)$ болады.



$\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \cdot \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{OC} =$
$= 0 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2$. Бұдан $\overrightarrow{AC} = (0, 2)$.
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -1 \cdot \overrightarrow{OB} + 1 \cdot \overrightarrow{OC} =$
$= -1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (-1, 1);$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2 \cdot \overrightarrow{OC} + OB - OC = OB + OC \Rightarrow AB = (1, 1);$
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{BD} = (0, 2);$
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = -2\vec{e}_2 - \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-1, 1)$. 2-

2-**мысал.** Базистік вектордың өзінің координаталарын табыңыздар. **Шешуі.** ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) базистегі $\vec{e}_1$-дің координаталарын табу үшін $\vec{e}_1$-ді базистік векторларға жіктеу керек. Ол былай жіктеледі $\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$. Сондықтан $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ болады. Сол сияқты $\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$ болатындықтан $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ болады. Бір ғана ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) базисінде координаталарымен берілген $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары олардың сәйкес координаталары тең болғанда және тек сонда ғана бір-біріне тең болатыны айқын, яғни

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

Координаталарымен берілген векторларға амалдар қолдану

Кеңістік базисі $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ берілсін. Ол базисте $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторының координаталары $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ болсын. Вектордың координаталары туралы мынадай ұйғарымдар дұрыс болады.

1^0. Екі немесе одан да көп векторлардың қосындысының координаталары, қосылған векторлардың сәйкес координаталарының қосындысына тең болады, яғни

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

Дәлелі. Вектордың координаталарының анықтамасы бойынша: $\vec{a}=(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)$ және $\vec{b}=(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)$ болады. Сонда, векторларды қосудың ауыстырымдылық, терімділік және үлестірімділік қасиеттері бойынша:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)+(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)=$$
$$=(x_1+x_2)\vec{e}_1+(y_1+y_2)\vec{e}_2+(z_1+z_2)\vec{e}_3$$

болып шығады. Бұдан вектор координатасының анықтамасы бойынша $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ болады. Бұл ереже векторлар саны екіден көп болған жағдай үшін де дұрыс болады.

1-мысал. $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ 2,\ 1)$ және $\vec{c}=(2,\ 0,\ 4)$ болса, онда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1+3+2,\ \ 2+2+0,\ \ 3+1+4)=(6,\ 4,\ 8).$

2^0. Векторлар айырымының координаталары олардың сәйкес координаталарының айырымына тең болады, яғни

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$$

болады. Дәлелдеуін студенттерге ұсынамыз.

3^0. Векторды санға көбейткенде оның барлық координаталары сол санға көбейтіледі, яғни

$$\lambda\vec{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$$

Дәлелі. $\vec{a}$ векторын базистік векторларға жіктесек $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3$ болады. Бұдан

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3) = (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda y_1)\vec{e}_2 + (\lambda z_1)\vec{e}_3$$

болатындықтан $\lambda\vec{a}$ векторының координаталары $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ болады.

2-мысал. 10 саны мен $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, 1\right)$ векторының көбейтіндісі $10\vec{a} = (5, -2, 10)$ болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Компланар және компланар емес векторлар деп қандай векторларды айтады?
2. Кеңістіктегі векторды компланар емес үш векторға жіктеу туралы теорема қалай тұжырымдалады?
3. Кеңістіктегі базис дегеніміз не және вектордың базистегі координаталары қалай анықталады?
4. Координаталарымен берілген векторларды қосу, азайту және санға көбейту амалдары қалай орындалады?
5. Екі вектордың теңдік және коллинеарлық шарттары координаталар арқылы қалай өрнектеледі?