29-дәріс. Бір қуысты гиперболоид. Екі қуысты гиперболоид
30-дәріс. Айналу параболоиды. Эллипстік параболоид. Гиперболалық параболоид

Дәріс жоспары:

1. Бір қуысты гиперболоидтың анықтамасы, канондық теңдеуі және геометриялық қасиеттері.
2. Екі қуысты гиперболоидтың канондық теңдеуі, негізгі қасиеттері және бір қуысты гиперболоидтан айырмашылығы.
3. Айналу параболоиды және эллипстік параболоидтың канондық теңдеулері, олардың геометриялық қасиеттері.
4. Гиперболалық параболоидтың канондық теңдеуі, геометриялық қасиеттері және пішінін зерттеу.

БІР ҚУЫСТЫ ГИПЕРБОЛОИД

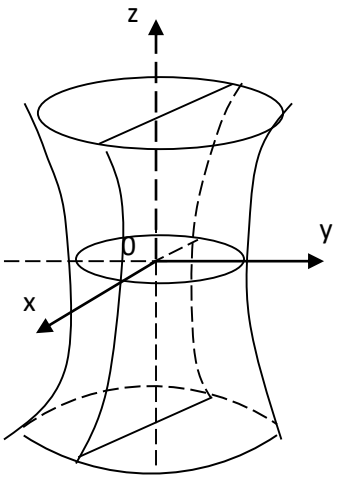
Координаталар жазықтығы Oyz-те гипербола

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0$$

берілсін. Ол гиперболаны өзінің жорымал өсі Oz айналасынан айналдырайық. Сонда шыққан бетті **бір қуысты айналу гиперболоиды** дейді. Айналу бетінің теңдеуін құру ережесі бойынша $y^2=b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$ мен $x^2=P$-ді тауып, оларды қоссақ: $y^2+x^2=b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$ шығады. Бұдан бір қуысты айналу гипербо-лоидтың теңдеуін аламыз:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Бір қуысты айналу гиперболоид оның (x,y,z) нүктесі, мына фор-муламен $x=\frac{b}{a}X,\quad y=Y,\quad z=Z$ анықталатын (X,Y,Z) нүктесіне көшетіндей етіп деформациялайық. Сонда (6.1) теңдеу мына түрге келер еді:



6-сурет

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1 \qquad (6.2)$$

Бұл теңдеумен анықталатын бетті бір қуысты гиперболоид дейді (6-сурет). Оны Oxy жазықтығына параллель $z=h$ жазықтығымен қиса, қимада теңдеуі мынадай болатын

$$\frac{X^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{Y^2}{b^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \quad Z=h$$

эллипс шығады. Бұл эллипс $|h|$ артқан сайын шексіз үлкейе береді, ол эллипстердің ең кішісі $h=0$ болғанда шығады, оны бір қуысты гиперболоидтың мойны (қылқасы) дейді.

Егер (6.2) гиперболоидты Oyz жазықтығына параллель $x=h<a$ жазықтығымен қиса, қимада мынадай гипербола шығады:

$$\frac{Y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{Z^2}{c^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)}=1, \quad X=h.$$

Ал, $h>a$ болса, онда мынадай гипербола шығады:

$$\frac{Y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)}-\frac{Z^2}{c^2\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)}=-1, \quad x=h.$$

Ал, $h=\pm a$ болса гипербола мынадай өзара қиылысатын екі түзуге

$$\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0 \quad \text{айналып кетеді.}$$

Бір қуысты (6.1) гиперболоидты $y=h$ жазықтығымен қиса, қимада алғашқыдай гипербола шығады. Бір қуысты айналу гиперболоидтың бір қуысты гпиерболоидтан өзгешелігі ол Oxy және оған параллель жазықтықтармен қиылысқанда қимада эллипс емес шеңберлер береді.

ЕКІ ҚУЫСТЫ ГИПЕРБОЛОИД

Координаталар жазықтығы Oyz-те $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad x=0$ гипербола берілсін. Ол гиперболаны өзінің нақты өсі Oy айналасынан айналдырайық. Сонда шыққан бетті екі қуысты айналу гиперболоиды дейді. Ол беттің теңдеуін құрайық. Сонда $x^2+z^2=c^2\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)$, бұдан іздеген теңдеу:

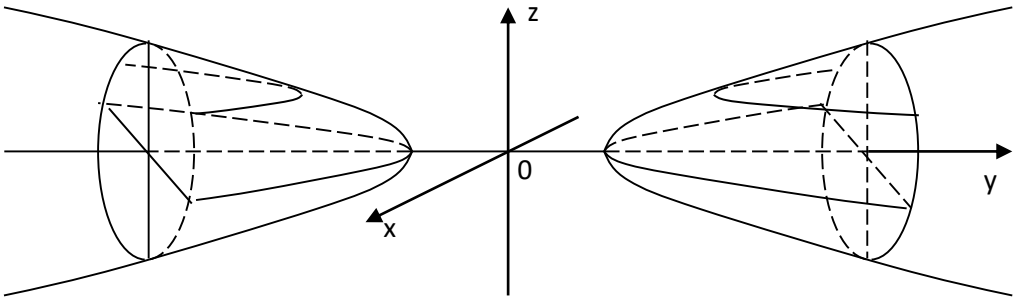
$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (7.1)$$

шығады. Екі қуысты айналу гиперболоидыны оның (x,y,z) нүктесі

мына формуламен $x=\frac{c}{a}X,\quad y=Y,\quad z=Z$ анықталатын (X,Y,Z) нүктеге көшетіндей етіп деформациялайық. Сонда (7.1) теңдеу мына түрге келеді

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=-1. \qquad (7.2)$$

Бұл теңдеумен анықталатын бетті **екі қуысты гиперболоид** деп атайды (7-сурет).



7-сурет

Екі қуысты (7.2) гиперболоидты Oxy жазықтығына параллель $z=h$ жазықтықпен қиса қимада нақты өсі *У* жорымал өсі Х болатын гипербола шығады.

$$-\frac{X^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{Y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}=1,\quad Z=h$$

ал Oyz жазықтығына параллель $x=h$ жазықтығымен қисақ қимада нақты өсі *У,* жорымал өсі Z болатын гипербола шығады.

$$\frac{Y^2}{b^2\left(1+\frac{X^2}{a^2}\right)}-\frac{Z^2}{c^2\left(1+\frac{X^2}{a^2}\right)}=1,\quad X=h.$$

Ал, Oxz жазықтығына параллель $Y=h>b$ жазықтықпен қисақ қимада эллипс

$$\frac{X^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}+\frac{Y^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)}=1$$

пайда болады және ол эллипс h артқан сайын шексіз үлкейе береді.

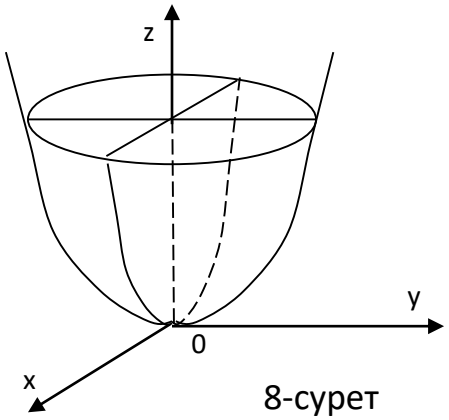
Екі қуысты айналу гиперболоидының екі қуысты гипербо-лоидтан өзгешелігі ол Oxz және оған параллель жазықтықтармен қиылысқанда қимада эллипс емес, шеңбер береді.

АЙНАЛУ ПАРАБОЛОИДЫ. ЭЛЛИПСТІК ПАРАБОЛОИД

yoz координата жазықтығында $y^2=2pz,\quad x=0$ парабола берілсін. Оны Ox өсі айналасынан айналдырса теңдеуі мынадай болатын

$$x^2+y^2=2pz \qquad (8.1)$$

бет шығады. Оны **айналу параболоиды** деп атайды. Оның (x,y,z) нүктесін мына формуламен $x=\frac{1}{p}\cdot X$, $y=\frac{1}{q}$. У, $z=\frac{1}{p}\cdot Z$ анықталатын (X,Y,Z) нүктеге көшетіндей етіп деформацияласақ (7.1) теңдеу мына түрге келер еді:



8-сурет

$$\frac{X^2}{p^2}+\frac{Y^2}{q^2}=2Z$$

Бұл теңдеумен анықталатын бетті **эллипстік параболоид** дейді (8-сурет).

Эллипстік параболоидты $z=h$ жазықтықпен қисақ, қимада эллипс шығады:

$$\frac{X^2}{2hp^2}+\frac{Y^2}{2hq^2}=1$$

және бұл эллипс h артқан сайын үлкейе түседі.

Егер эллипстік параболоидты $Y=h$ жазықтығымен қисақ қимада

$$x^2=2p^2Z-\frac{p^2}{q^2}h^2,\quad Y=h$$

парабола шығады.

Ал, эллипстік параболоидты $x=h$ жазықтықпен қисақ қимада тағы да парабола шығады.

$$Y^2=2q^2Z-\frac{q^2}{p^2}h^2,\quad x=h$$

(8.1) айналу параболоидтың (8.2) эллипстік параболоидтан өзгешелігі Ox және оған параллель жазықтықтармен қиылысқанда қимада эллипс емес, шеңбер беретіндігінде.

ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ПАРАБОЛОИД

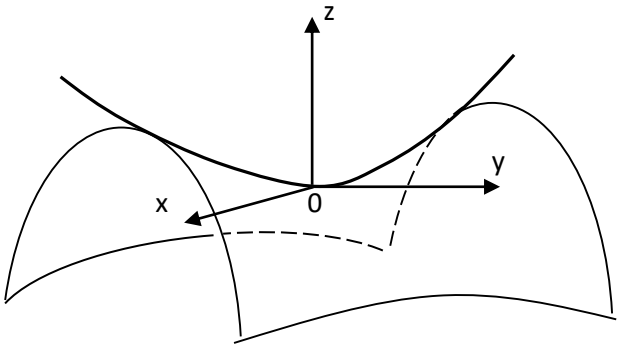
Тік бұрышты координаталар жүйесінде мынадай теңдеумен

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2Z \qquad (9.1)$$

анықталатын бетті **гиперболалық параболоид** дейді.Оның формасын анықтау үшін ол бетті координаталар жазықтықтармен және оған параллель жазықтықтармен қиып, қимасын зерттейміз. Оның Oxz координата жазықтығының қимасы $x^2=2pz,\quad y=0$ парабола болады, оның өсі Oz өсінің оң бағытымен дәл келеді.

Оның Oyz координата жазықтығымен қимасы өсі Oz өсінің теріс бағытымен дәл келетін парабола болады: $y^2 = -2qz, \quad z = 0$

Оның Oxy координата жазықтығымен қимасы өзара қиылысатын екі түзуден тұрады: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \quad z = 0$. Ал, Oxy жазықтығына параллель $z = h$ жазықтықпен қиса, қимада гипербола пайда болады $\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \quad z = h. \quad h > 0$ болғанда оның нақты өсі Ox өсіне параллель, $h < 0$ болғанда Oy өсіне параллель болады. Тиісті жазықтықтарды айтылған қималарды салсақ, оның формасын елестететін 9-сурет шығады.



9-сурет

Бақылау сұрақтары:

1. Бір қуысты гиперболоид дегеніміз не және оның канондық теңдеуі қалай жазылады?
2. Екі қуысты гиперболоидтың канондық теңдеуі қандай және оның бір қуысты гиперболоидтан негізгі айырмашылықтары неде?
3. Айналу параболоиды дегеніміз не және оның теңдеуі қалай анықталады?
4. Эллипстік параболоидтың канондық теңдеуі қалай жазылады және оның геометриялық қасиеттері қандай?
5. Гиперболалық параболоидтың канондық теңдеуі қандай және оның пішіні мен негізгі қасиеттері қалай зерттеледі?