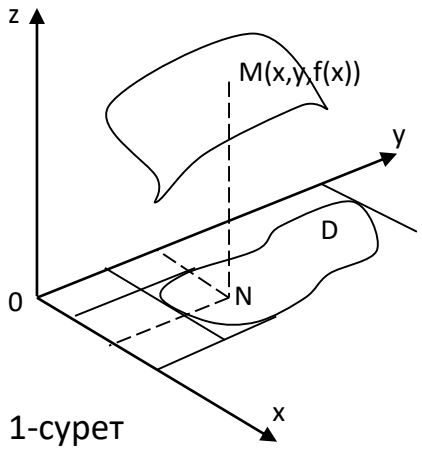
27-дәріс. Сфералық бет. Цилиндрлік бет. Конустық бет.
28-дәріс. Айналу беттері. Айналу эллипсоиды. Үш өсті эллипсоид.

Дәріс жоспары:

1. Сфералық беттің анықтамасы, негізгі қасиеттері және теңдеуі.
2. Цилиндрлік және конустық беттердің анықтамалары, түрлері және теңдеулері.
3. Айналу беттері, олардың жасалу жолдары және теңдеулері.
4. Айналу эллипсоиды мен үш өсті эллипсоидтың канондық теңдеулері және геометриялық қасиеттері.

ЕКІНШІ РЕТТІ БЕТТЕР

Кеңістікте тік бұрышты $Oxyz$ координаталар жүйесі ендірілсін, Oxy жазықтығынан D облысын алайық (1-сурет). Үш айнымалы Ф(x, y, z)=0 (*) теңдеу берілсін. Айнымалы x пен y-тың D облысын алынатын әрбір мәніне сай (*) теңдеуден белгілі бір $z = f(x, y)$ табылады. Бұл $x,\ y,\ f(x, y)$ үш саны



1-сурет

кеңістікте координаталары осы сандар болатын бір $M(x, y, f(x, y))$ нүктені анықтайды. Сонда x пен y D-облысындағы барлық мәндерін қабылдап шыққанда $M(x, y, z)$ нүкте кеңістікте белгілі тәртіпте орналасқан нүктелер жиынын жасап шығады. Оны **бет** дейді. Ал, сол бетте жатқан нүктелердің координаталары ғана қанағаттандыратын, онда жатпайтын нүктелердің координаталары қанағаттандырмайтын үш айнымалылы Ф(x, y, z)=0 теңдеу беттің теңдеуі делінеді.

Кеңістікте кез-келген дене бір немесе бірнеше беттермен шектеліп жатады. Сол беттердің теңдеулерін құрып, оларды зерттеу арқылы берілген дененің кеңістіктегі орны, формасын т.б. қасиеттерін анықтауға болады.

Үш айнымалылы бірінші дәрежелі теңдеудің түрі $Ax + By + Cz + D = 0$ болады. Оның жазықтықты анықтайтынын көрдік. Енді үш айнымалылы екінші дәрежелі теңдеулермен анықталатын геометриялық бейнелерді қарастырамыз. Ондай теңдеудің жалпы түрі мынадай болады.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Kx + Ly + Mz + N = 0.$$

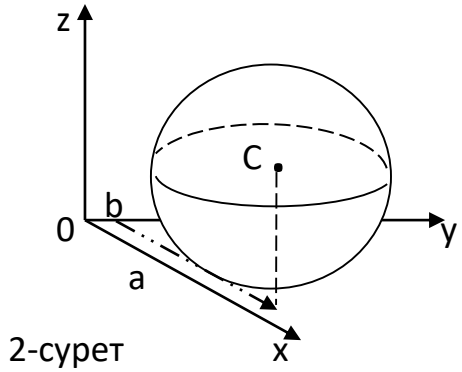
Мұндай теңдеулер коэффициенттерінің әртүрлі мәндерінде әртүрлі беттерді анықтайды. Ол қандай да бір бетті анықтау үшін оның аға мүшелерінің коэффициенттері қатарынан нөлге тең болмауы керек.

СФЕРАЛЫҚ БЕТ

Кеңістіктің берілген бір нүктеден бірдей қашықтықта жатқан нүктелерінің жиынын шар бет немесе сфералық бет немесе жай ғана сфера дейді.

Анықтамада айтылған берілген нүктені сфераның центрі, ал тұрақты қашықтықты сфераның радиусы дейді. Сфераның центрі C, радиусы R болса, онда сфера-кеңістіктің $|CM| = R$ шартын қанағаттандыратын барлық M нүктелерінің жиыны болып шығады. Беттің екі нүктесін қосып, центрден өтетін кесіндіні диаметр дейді, ол екі радиусқа тең болады.

Кеңістікке тік бұрышты координаталар жүйесі $Oxyz$ ендірілсін. Центрінің координаталары $C(a,b,c)$ болатын, радиусы R-ге тең сфера берілсін (2-сурет). $M(x,y)$ сфераның кез-келген бір нүктесі болса, онда анықтама бойынша $CM = R$ болатындықтан



2-сурет

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R$$

болу керек. Бұдан центрі $C(a,b,c)$ мен R радиусы белгілі сфераның теңдеуі шығады

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2. \qquad (1.1)$$

Ал, егер центрі координата басымен беттессе онда сфера теңдеуі

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \qquad (1.2)$$

болады.

1-мысал. Центрі координаталар басында жататын радиусы 5-ке тең сфераның теңдеуін құру керек.

Шешуі. Мұнда $C(0,\ 0,\ 0)$, $R = 5$. Сондықтан (1.2) бойынша іздеген теңдеу $x^2+y^2+z^2 = 25$ болады.

2-мысал. Центрі $C(2,-3,5)$ нүктесі болатын, радиусы 6-ға тең болатын сфераның теңдеуін құру керек.

Шешуі. Берілген мәнді (1.1) теңдеуге қоямыз. Сонда сфера теңдеуі $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=36$ болады.

3-мысал. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+5=0$ теңдеуін сфера теңдеуі екендігін дәлелдеу керек.

Шешуі. Теңдеудің сол жағын x, y, z бойынша топтап, оны толық квадратқа толтырамыз:

$$x^2-2x+1-1+y^2+4y+4-4+z^2-6z+9-9+5=0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

Олай болса берілген теңдеу центрі (1, -2, 3), радиусы $R=3$ болатын сфераның теңдеуі екен.

Кеңістіктің берілген C нүктеден қашықтықтары R-ден аспайтын барлық нүктелерінің жиынын центрі C нүктесі, радиусы R-ге тең болатын шар дейді. Басқаша айтқанда центрі C нүктесі, радиусы R болатын шар кеңістіктің $|CM|\le R$ шартын қанағаттандыратын барлық M нүктелерінің жиыны. Бұл шарт координаталар бойынша былайша өрнектейді.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2.$$

Центрі C нүктесі, радиусы R болатын сфера ол шардың беті делінеді. Бұл кезде сфера шарды шектейді делінеді.

ЦИЛИНДРЛІК БЕТ

Екінші тарауда тек екі айнымалысы бар теңдеудің, бағыт-таушысы сол теңдеумен анықталатын сызық болатын, ал жасау-шыны ол теңдеуге енбеген айнымалылы координата өсіне параллель болатын цилиндрлік бетті анықтайтыны айтылды.

Енді жалпы жағдайды қарастырамыз.

Бұрын айтылғандай, цилиндрлік бет немесе жәй ғана цилиндр деп, бір түзудің бағыттаушы делінетін сызық бойымен берілген векторға параллель болып үздіксіз қозғалуынан шығатын бетті айтады. Ол түзуді цилиндрдің жасаушысы дейді.

Егер цилиндрлік беттің бағыттаушысы екінші ретті сызық болса, ол екінші ретті цилиндрлік бет делінеді. Мысалы,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=2Px$$

теңдеулері сәйкесінше жасаушысы Oz өсіне параллель болатын эллипстік цилиндрді, гиперболалық цилиндрді, параболалық цилиндрді анықтайды.

Цилиндрлік беттің бағыттаушысы

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ F_1(x,y,z)=0\end{cases}\qquad (2.1)$$

теңдеулер жүйесімен берілсін, ал жасаушысы $\overrightarrow{S}=(m,n,l)$ векторына параллель болсын. Онда цилиндрдің ағымдық нүктесінің координаталарын (X,Y,Z) арқылы, ал жасаушыда жатқан бір нүкте координаталарын (x,y,z) арқылы белгілесек, онда жасаушының канондық теңдеуі мынадай болар еді.

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{l}.\qquad (2.2)$$

(2.1), (2.2) төрт теңдеуден x,y,z-терді жою (арылу) арқылы цилиндрлік беттің теңдеуін аламыз.

Мысал. Бағыттаушысы $\begin{cases}y^2=4x,\\ z=0\end{cases}$ парабола болатын,

жасаушысы $\overrightarrow{S}=(2,1,1)$ векторына параллель болатын цилиндрлік беттің теңдеуін құру керек.

Шешуі. Жасаушының канондық теңдеуі $\frac{X-x}{2}=\frac{Y-y}{1}=\frac{Z-z}{1}$ болады. Бұл және берілген теңдеуден x,y,z жоямыз (арылтамыз). Берілу бойынша $z=0,\quad x=X-2Z,\quad y=Y-Z$. Мұны берілген теңдеуге қойсақ $(Y-Z)^2=4(X-2Z)$ немесе $Y^2+Z^2-2YZ-4X+8Z=0$ іздеген теңдеу болады.

КОНУСТЫҚ БЕТ

Кеңістіктегі қозғалыста үнемі берілген бір нүктеден өтіп және берілген сызықты қиып отыратын түзудің қозғалуынан шығатын бет конустық бет немесе жәй ғана конус деп аталады.

Мұнда айтылған нүкте - конустың төбесі, сызық - конустың бағыттаушысы, қозғалушы түзу - конустың жасаушысы делінеді.

Егерде конустың төбесінің координаталары (x_0, y_0, z_0) және бағыттаушы сызықтың теңдеуі

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

берілсе, онда ол конустың теңдеуін құруға болады. Жасаушысының теңдеуін (x_0, y_0, z_0) төбесі мен бағыттаушының нүктесі (x, y, z) арқылы өтетін түзу ретінде құрамыз:

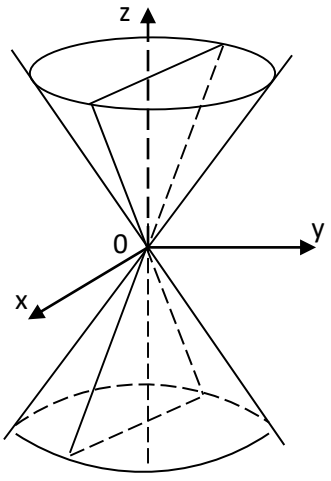
$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0}. \qquad (3.2)$$

(3.1), (3.2) төрт теңдеуден x, y, z-ті арылту арқылы іздеп отырған конустық беттің теңдеуін аламыз.

Мысал. Төбесі координаталар басында жататын бағыттаушысы

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c \end{cases}$ сызығы болатын конустық беттің теңдеуін құру керек.

Шешуі. Конустың төбесі (0,0,0) нүктемен бағыттаушының нүктесі (x, y, z) өтетін түзу ретінде конустық жасаушының теңдеуін құрамыз. Ол $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$ болады. Берілген төрт теңдеу жәрдемімен x, y, z арылайық. Ол үшін $z = c$ екенін ескерсек, соңғы теңдіктен $x = c\frac{X}{Z}$, $y = c\frac{Y}{Z}$ болар еді. Берілген бағыттаушы теңдеуіне қойсақ $\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{Z^2} + \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{Y^2}{Z^2} = 1$. Бұдан

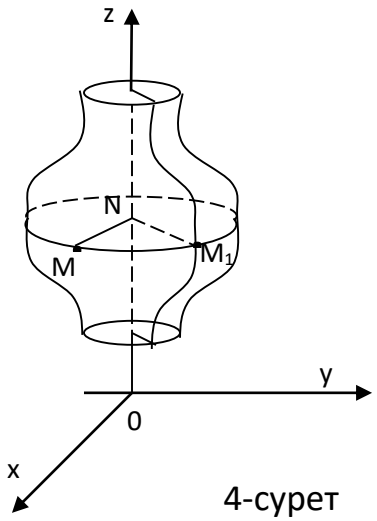


3-сурет

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (3.3)$$

Бұл екінші ретті конус делінеді. Оның беті координата басына қарағанда симметриялы және координата жазықтықтары оның симметрия жазықтығы болады (3-сурет).

АЙНАЛУ БЕТТЕРІ



4-сурет

Жазық сызықтың өзінің жазықтығында жатқан түзу айналасынан айналуынан шыққан бетті **айналу беті** дейді. Ол түзу айналу бетінің өсі делінеді. Айналу бетін оның өсіне перпендикуляр жазықтықпен қиса, қимада центрі сол өсте жататын шеңбер шығатыны түсінікті.

Координаталар жазықтығында жатқан сызықтарды координата өстері айналасынан айналдырғанда шығатын беттердің теңдеуін құру ережелерін қарастырайық.

Тік бұрышты $Oxyz$ координаталар жүйесінің yOz жазықтығына

$$F(Y,Z)=0 \qquad (4.1)$$

теңдеулі L сызығы жатсын. Ол сызықты Oz өсі айналасынан айналдырғанда шығатын бет теңдеуін құрайық. Беттің кез-келген $M(x,y,z)$ нүктесін алып ол нүктеден Oz өсіне перпендикуляр жазықтық жүргізейік, ол өсті N нүкте,L сызығын M_1 нүктеден қисын. Сонда M,N,M_1 үш нүктенің аппликаталары z теңдей болады және центрі $N(0,0,z)$ өсінде жататын, радиусы NM болатын шеңбер шығады $|NM|=\sqrt{x^2+y^2}$ болады. Ол M_1 нүктесінің ординатасының абсолют шамасына тең болады. Сондықтан (4.1)-дегі $Y=\pm\sqrt{x^2-y^2}$, $Z=z$ болады. Сонда іздеген айналу денесінің беті $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$ болып шығады (4-сурет). Сонымен мынадай ереже шығады. yOz координата жазықтығында жатқан L сызығы Oz өсі айналуынан шығатын беттің теңдеуін алу үшін ол сызықтың теңдеуіндегі y-ті $\pm\sqrt{x^2+y^2}$-пен алмастыру керек. Радикал алдындағы таңбаны берілген сызықтағы y-тің таңбасымен бірдей етіп алу керек.

Сызықты басқа координата өстері айналасынан айналдырғанда шығатын айналу бетінің теңдеуі дәл осы ережемен анықталады. Мысалы,

жазықтығында берілген $x^2+y^2=7,\ \ z=0$ шеңбердің Oy өсімен айналуынан шыққан беттің теңдеуін құру үшін $x^2=7-y^2,\ \ z^2=0$ тауып, оларды қосу керек $x^2+z^2=7-y^2$ іздеген айналу беттің теңдеуі болады.

АЙНАЛУ ЭЛЛИПСОИДЫ. ҮШ ӨСТІ ЭЛЛИПСОИД

yOz жазықтығынан $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ теңдеулі эллипс алайық та, оны Oz өсі айналасынан айналдырайық. Сонда шыққан айналу бетін **айналу эллипсоиды** деп атайды. Жоғарыда айтылған ереже бойынша оның теңдеуін құрсақ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (5.1)$$

болып шығады.

Егер $b>c$ болса, онда (5.1) сығыңқы айналу эллипсоидын, ал $b<0$ болса созылыңқы айналу эллипсоидысын, ал $b=c$ болғанда сфераны анықтайды.

Айналу эллипсоидысын оның әрбір (x,y,z) нүктесі $x=\frac{b}{a}X,\ \ y=Y,\ \ z=Z$ формуламен анықталатын (X,Y,Z) нүктесіне көшетіндей етіп деформациялайық. Сонда (5.1) теңдеу мына түрдегі теңдеуге көшеді.

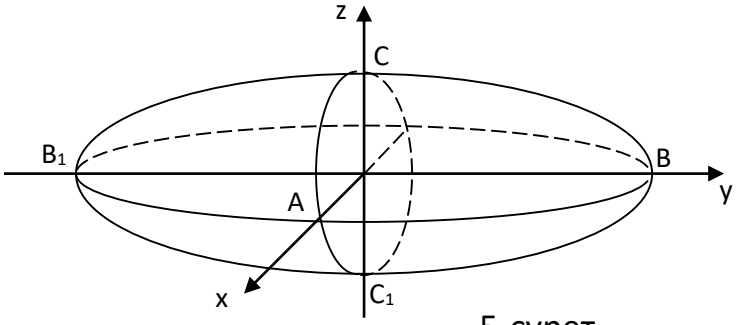
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1. \qquad (5.2)$$

Бұл деформация геометриялық тұрғыда бүкіл кеңістік нүктелері оның ішінде берілген айналу эллипсоиды бетінің нүктелерде Ox өсіне параллель бағытта Oyz жазықтығына қарай бірдей мөлшерге жылжиды дегенді білдіреді.

Егер $a>b$ болса деформация (5.1) айналу эллипсоиды Oxz жазықтығына симметриялығын сақтай отырып Ox өсі бағытымен сығады (себебі $X>z$), ал $a<b$ болса, керісінше Oyz жазықтығына сығады (себебі бұл кезде $X<x$).

(5.2) бет координата өстерінен $2a, 2b, 2c$ кесінділер қияды (5-сурет). Егер олар бір-біріне тең болмаса (яғни $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ болса) онда ол бет үш өсті эллипсоид делінеді.

Айналу беттерін қима әдісін пайдаланып зерттейді, яғни берілген бетті координата жазықтықтары және оған параллель жазықтықтармен қиып, қимасын зерттейді. Мысалы, (5.1) айналу эллипсоидыны Oxy жазықтығымен қиса қимада $x^2 + y^2 = b^2$ шеңбер шығады. Ал, оны Ozy жазықтыққа параллель болатын $z = h$ жазықтығымен қиса, қимада мынадай шеңбер шығады:



5-сурет

$$x^2 + y^2 = b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right), \quad z = h.$$

Ол шеңбер h көбейген сайын кішірейіп, $h = c$ болғанда нүктеге айналады. Ал, айналу эллипсоидыны $y = h \quad (|h| < b)$ жазықтықпен қиса, қимада

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \quad y = h, \qquad \frac{x^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1, \quad y = h$$

болатын эллипс шығады және ол эллипс h көбейген сайын кішірейіп, $h = b$ болғанда нүктеге айналады.

Осы сияқты айналу эллипсоидыны $x = h \quad (h < a)$ болатын Oyz жазықтығына параллель жазықтықпен қиса, қимада

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)} = 1, \quad x = h$$

эллипсі шығады. Ал, үш өсті (5.2) эллипсоидыны кез-келген координата жазықтығымен және оған параллель жазықтықтармен қиса, қимада тек жаңа эллипс шығады.

Бақылау сұрақтары:

1. Сфералық бет дегеніміз не және оның теңдеуі қалай жазылады?
2. Цилиндрлік және конустық беттер қалай анықталады? Олардың негізгі қасиеттері қандай?
3. Айналу беті дегеніміз не және оның теңдеуі қалай құрылады?
4. Айналу эллипсоиды дегеніміз не және оның канондық теңдеуі қалай жазылады?
5. Үш өсті эллипсоидтың канондық теңдеуі қандай және оның айналу эллипсоидынан айырмашылығы неде?