**23-дәріс. Шеңбер.**
**24-дәріс. Эллипс анықтамасы және канондық теңдеуі. Эллипстің формасын канондық теңдеуі арқылы зерттеу**

**Дәріс жоспары:**

1. Шеңбердің анықтамасы, негізгі элементтері және канондық теңдеуі.
2. Шеңбердің жалпы теңдеуі және оны канондық түрге келтіру.
3. Эллипстің анықтамасы, негізгі элементтері және канондық теңдеуі.
4. Эллипстің канондық теңдеуі арқылы оның геометриялық қасиеттері мен формасын зерттеу.

## Екінші ретті сызықтар және оларды канондық теңдеулері арқылы зерттеу

Екінші ретті сызық деп теңдеуін кез-келген тік бұрышты координаталар жүйесінде екінші дәрежелі алгебралық теңдеуге келтіруге болатын сызықтарды айтады. Екінші дәрежелі алгебралық теңдеудің жалпы түрі мынадай болады:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

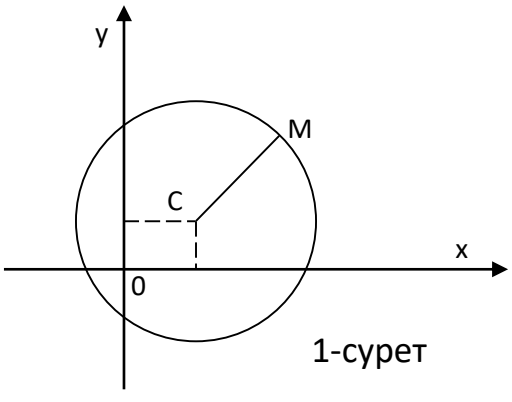
Мұндағы $A, B, C$ қатарынан нөлге тең болмауы керек. Біз бұл тарауда жиі кездесетін 2-ретті алгебралық сызықтарды: шеңбер, эллипс, гипербола, парабола қарастырамыз.

## Шеңбер

**АНЫҚТАМА.** Шеңбер деп жазықтықтың бір нүктесінен бірдей қашықтықта жататын нүктелерінің жиынын айтады.

Тік бұрышты координаталар жүйесінде центрі $C(a,b)$ нүкте болатын, радиусы $R$-ге тең шеңбер берілсін. Шеңбер бойынан кез-келген $M(x,y)$ нүктесін (оны ағымдық нүкте дейді) алайық

(1-сурет). Сонда $M$ шеңбер бойында жатса, тек сонда ғана



1-сурет

$$|CM| = R \qquad (1.1)$$

болады. Екі нүктенің арақашықтығын табу формуласы бойынша

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

болады. Мұны (1.1)-ге қойып, квадраттасақ:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1.2)$$

теңдеуі шығады. Ол шеңбердің жалпы теңдеуі делінеді.

Мысалы, $(x-1)^2+(y+3)^2=49$ теңдеуі центрі $C(1,-3)$ нүкте, радиусы $R=7$ болатын шеңберді анықтайды. Егер шеңбердің центрі координаталар басымен дәл келсе, онда $a=0,\ b=0$ болады да (1.2) теңдеуден

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (1.3)$$

теңдеу шығады. Оны шеңбердің **канондық теңдеуі** дейді. Шеңбердің теңдеулері екінші дәрежелі теңдеу болады. Сондықтан шеңбер екінші ретті сызық болады.

**1-мысал.** Радиусы 5-ке тең центрі координаталар басында жататын шеңбер теңдеуін құру керек.

**Шешуі.** Центрі O(0,0), $R=5$ болғандықтан шеңбер теңдеуі (1.3) бойынша $x^2+y^2=25$ болады.

**2-мысал.** Радиусы 7-ке тең, центрі (2, -4) нүкте болатын шеңбердің теңдеуін құру керек.

**Шешуі.** (1.2) формула бойынша $(x-2)^2+(y+4)^2=7^2$ іздеген теңдеу болады. Жақшаны ашып, ұқсас мүшелерін біріктіріп шеңбер теңдеуін былайша жазуға болады: $x^2+y^2-4x+8y-29=0.$

**3-мысал.** $(x+3)^2+(y-5)^2=100$ шеңберінің центрі мен радиусын табыңыздар.

**Шешуі**. (1.2) бойынша $a=-3,\ \ b=5,\ \ R=10$. Сондықтан радиусы 10-ға тең, центрі (-3, 5) нүктеде жатады.

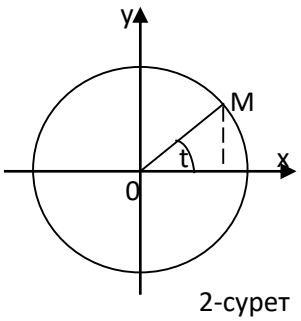
**4-мысал.** $x^2+y^2-6x+4y+1=0$ шеңбердің центрі мен радиусын табыңдар.

**Шешуі**. Теңдеуді былайша түрлендіреміз:

$$x^2-2x\cdot 3+9+y^2+2y\cdot 2+4+1=9+4\Rightarrow(x-3)^2+(y+2)^2=12$$

Сондықтан шеңбердің радиусы $\sqrt{12}$, центрі (3, -2) нүкте болады.

Центрі тік бұрышты координаталар жүйесінің бас нүктесі болатын $R$ радиусы шеңберді қарастырайық (2-сурет). Оның бойынан $M(x,y)$ нүктесін алайық. Ол нүктенің радиус векторы $\overrightarrow{OM}$ абсцисса өсінің оң бағытымен $t$ бұрыш жасасын. Сонда $M(x,y)$ нүктенің абсциссасы мен ординатасы $x, y$ осы $t$-ға байланысты $(0 \le t < 2\pi)$ өзгереді және $\Delta ONM$ тік бұрышты үшбұрыштан



2-сурет

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases} \quad (1.4)$$

болып шығады. Мұның екі жағын квадраттап қоссақ (1.3) теңдеуі шығады. Бұл (1.4) теңдеу шеңбердің параметрлік теңдеуі делінеді, параметр $t$.

**5-мысал.** Шеңбер $x = \sqrt{3}\cos t, \quad y = \sqrt{3}\sin t \quad (0 \le t < 2\pi)$ теңдеулермен берілген. Оның канондық теңдеуі қандай болады?

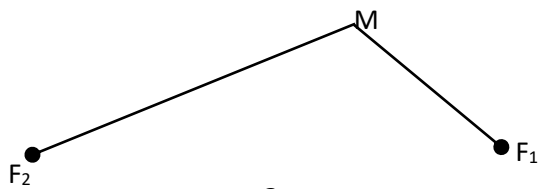
**Шешуі.** Берілген шарттан $x^2 = 3\cos^2 t, \quad y^2 = 3\sin^2 t$ болады. Оларды мүшелеп қоссақ $x^2 + y^2 = 3\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 3$. Сонымен

канондық теңдеу $x^2 + y^2 = 3$ болады.

### Эллипс анықтамасы және канондық теңдеуі

**АНЫҚТАМА.** Эллипс деп жазықтықтың екі нүктесінен қашықтықтарының қосындысы тұрақты және сол екі нүктенің арақашықтығынан артық болатын нүктелерінің жиынын айтады.

Анықтамада келтірілген екі нүктені эллипстің фокустары дейді, оларды $F_1$ және $F_2$ арқылы белгілейік, олардың арақашықтығы *2C* болсын. Егер *M* нүкте эллипстің кез-келген бір нүктесі болса, онда анықтама бойынша $\left|F_1M\right| + \left|F_2M\right|$ эллипстің барлық нүктелері үшін тұрақты шама болуы керек, оны $2a$ дейік.



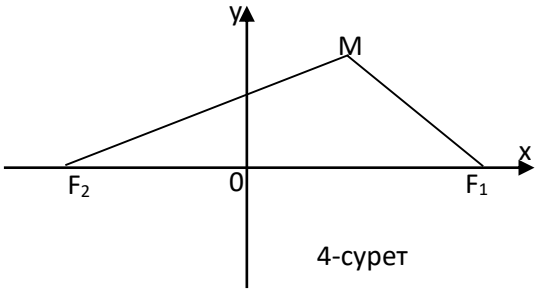
3-сурет

Сонымен эллипстің кез-келген *M* нүктесі үшін

$$\left|F_1M\right| + \left|F_2M\right| = 2a \quad (2.1)$$

$\left|F_1F_2\right| = 2c$ және $2a > 2c, \quad a > c$ (2.2)

болуы керек (3-сурет). Эллипстің теңдеуін қорытып шығару үшін, тік бұрышты координаталар жүйесін былайша таңдап алайық. Фокустар аралығы $F_1F_2$ кесіндінің қақ ортасын координата басы 0 үшін, фокустар арқылы өтетін $F_1F_2$ түзуін абсцисса өсі үшін, ал оның оң бағытын $F_2$-ден $F_1$ қарай алайық. Бұл алынған координаталар жүйесінде фокустардың координаталары $F_1(c,0),\ F_2(-c,0)$ болады. $M(x,y)$ нүкте эллипсте жатсын (4-сурет).



4-сурет

Екі нүктенің ара қашықтығының формуласы бойынша

$$r_1=\left|F_1M\right|=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2},\ r_2=\left|F_2M\right|=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$$

болады. Бұларды (2.1)-ге қойсақ

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (2.3)$$

теңдеуі шығады. Мұны эллипс бойында жататын нүктелер ғана қанағаттандыратындықтан, ол эллипстің теңдеуі болады. Бұл теңдеуді қарапайым түрге келтіруге болады. Ол үшін теңдеудің сол жағындағы екінші қосылғышты оң жағына шығарамыз: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Сонан соң алынған теңдіктің екі жағын да квадраттаймыз:

$(x+c)^2+y^2=\ =4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$.Бұдан

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Тағы да теңдіктің екі жағын квадрат дәрежеге шығарамыз:

$$a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

Енді бұл теңдікті топтаймыз

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right). \qquad (2.4)$$

Эллипстің анықтамасы бойынша $a>c$, сондықтан $a^2-c^2$ оң сан. Оны $b^2$ арқылы белгілейміз, яғни

$$b^2=a^2-c^2. \qquad (2.5)$$

Сонда (2.4) теңдеуі $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ түріне келеді. Соңғы теңдіктің екі жағын да $b^2$ -қа бөліп,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.6)$$

теңдеуін аламыз.

Сонымен нүкте эллипсте жатса, ол нүктенің координаталары $(x,y)$ соңғы (2.6) теңдеуді қанағаттандырады екен. Бірақ ол эллипстің теңдеуін (2.3), екі рет квадраттау нәтижесінде шықты. Сондықтан, ол теңдеуді де эллипстің теңдеуі екенін дәлелдеу үшін координаталары (2.6) теңдеуді қанағаттандыратын нүктенің эллипсте жататындығын, яғни ол нүктенің фокустардан қашықтықтарының қосындысы $2a$ болатынын дәлелдеу керек. $M(x_0,y_0)$ нүктенің координаталары (2.6) теңдеуді қанағаттандырсын:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1, \text{ онда } y_0^2=b^2\left(1-\frac{y_0^2}{a^2}\right) \text{ болады.}$$

Сонда

$$F_1M_0=r_1=\sqrt{(x_0-c)^2+(y_0-c)^2}=\sqrt{(x_0-c)^2+b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{x_0^2-2cx_0+c^2+b^2-\frac{b^2x_0^2}{a^2}}=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2+c^2+b^2-2cx_0}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x_0^2+c^2+b^2-2cx_0}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x_0^2+a^2-2cx_0}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}$$

Дәл осы сияқты $F_2M_0=r_2=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}$ болады. (2.6) теңдеуден $|x|\le a$ болады және $c<a$ екенін ескерсек $x$-тың кез-келген мәні үшін түбір астындағы өрнектер $\frac{c}{a}x+a>0,\quad \frac{c}{a}x-a<0$ болады.

Сөйтіп түбірден шығарсақ: $F_1M = r_1 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right) = a - \frac{c}{a}x;$

$$F_2M = r_2 = \frac{c}{a}x + a. \qquad (2.7)$$

Ал, бұлардың қосындысы

$$\left|F_1M\right| + \left|F_2M\right| = a - \frac{c}{a}x + \frac{c}{a}x + a = 2a$$

болып шығады.

Сонымен (2.6) теңдеуді координаталары қанағаттандыратвн нүкте эллипстің нүктесі болады екен. Сондықтан (2.6) эллипстің теңдеуі болады. Оны эллипстің канондық теңдеуі дейді. Ол теңдеу екінші дәрежелі теңдеу. Демек, эллипс екінші ретті сызық болады.

**Эллипстің формасын канондық теңдеуі арқылы зерттеу**

Эллипстің формасын оның канондық теңдеуі

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2.6)$$

жәрдемімен зерттейік.

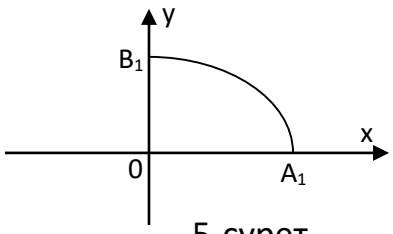
**1. ЭЛЛИПСТІҢ СИММЕТРИЯСЫ.** (2.6) теңдеуге айнымалы $x$ пен $y$ тек квадрат дәрежеде енген. Сондықтан координатасы $(x, y)$ болатын нүкте эллипсте жатса, онда координаталары $(x,-y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ болатын нүктелерде сол эллипсте жатады. Сондықтан, эллипс координата өстеріне және координата басына қарағанда симметриялы фигура болады. Бұл өстерді эллипстің өстері, олардың қиылысу нүктесін эллипстің центрі дейді. Фокустар жататын өсін фокустың өсі дейміз.

**2. ЭЛЛИПСТІҢ ОРНАЛАСУ ОБЛЫСЫ.** (2.6) теңдеуден $|x| \le a$, $|y| \le b$ болатыны шығады. Бұдан $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ болатындықтан, эллипстің барлық нүктелері қабырғалары $2a$ және $2b$ болатын тік төртбұрыштың ішіне орналасады. Сөйтіп эллипс шектелген фигура болады.

**3. ЭЛЛИПСТІҢ ӨСТЕРМЕН ҚИЫЛЫСУ НҮКТЕЛЕРІ.** (2.6) теңдеуде $x = 0$ болса $y^2/b^2 = 1$, яғни $y = \pm b$ болады. Ал, бұл эллипс $Oy$ өсімен $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$ екі нүктеде қиылысады деген сөз. Егер $y = 0$ болса, онда

(2.6)-дан $x^2/a^2=1\Rightarrow x=\pm a$ болады. Ал, бұл эллипс $Ox$ өсімен $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ болатын екі нүктеде қиылысады деген сөз. Эллипстің өстермен қиылысу нүктелерін оның төбелері дейді. $A_1A_2=2a$ кесіндісін эллипстің фокустік өсі немесе үлкен өсі, $B_1B_2=2b$ кіші өсі делінеді. Ал, $a$ мен $b$ үлкен және кіші жарты өсі делінеді. $OF_1=OF_2=c$ кесінділер фокус қашықтығының жартысы, ол (2.5) бойынша $c=\sqrt{a^2-b^2}$ болады.

**4. ЭЛЛИПСТІҢ ФОРМАСЫ.** (2.6) теңдеуден $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ болады. Біз бірінші координаталық бұрыштағы эллипстің формасын зерттейік, ал бірінші координаталық бұрышта $x>0,\ y>0$ болатындықтан $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ деп алайық. Ал, $|x|\le a$ болатындықтан, соңғы теңдіктен *x* шама 0-ден $a$-ға дейін өскенде *y* шама $b$-дан 0-ге дейін кемиді. Сондықтан эллипстің бірінші координаталық бұрыштағы формасы 5-суреттегідей болады. Эллипс $Ox, Oy$ өстеріне және координата басы 0 нүктеге қарағанда симметриялы болатындықтан 5-суреттегі $A_1B_1$ қисық сызыққа симметриялы сызықтар салып эллипстің толық кескінін алуға болады (6-сурет).



5-сурет

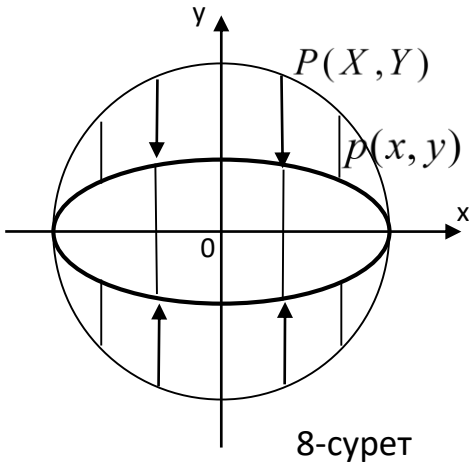
**5. ЭЛЛИПСТІҢ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТІ.** Эллипстің фокус аралығының оның фокустық өсіне қатынасы эллипстің эксцентриситеті делінеді. Оны $\varepsilon$ арқылы белгілесек, анықтама бойынша:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \qquad (2.8)$$

Эллипс анықтамасы бойынша $0<c<a$ болатындықтан, оның эксцентриситеті $0<\varepsilon<1$ аралықта болады. Ал, (2.5) бойынша $b^2=a^2-c^2=a^2-\varepsilon^2a^2=a^2(1-\varepsilon^2)$ болатындықтан $\frac{b^2}{a^2}=1-\varepsilon^2$, $\varepsilon=\sqrt{1-b^2/a^2}$ болады.

Бұл теңдіктен егер $b\to a$ (яғни эллипстің кіші өсі үлкен өсіне ұмтылса) онда $\varepsilon\to 0$, ал $b\to 0$, онда $\varepsilon\to 1$. Сонымен, эллипстің эксцентриситеті 0 ден

1-ге дейін артса, онда $b$ жарты өсі $a$-дан 0-ге дейін кемиді екен. Сөйтіп, эксцентриситет артқан сайын эллипс тарыла түседі. 7-суретте $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \varepsilon_4 = 0$ болатын эллипстер салынған.



8-сурет

Егер $\varepsilon = 0$ болса $a = b$ болады да (2.6) теңдеу $x^2 + y^2 = a^2$ болады. Бұл шеңбердің теңдеуі. Олай болса шеңбер эллипстің дербес түрі болады, атап айтқанда эксцентриситеті нөлге тең эллипс болады. Сөйтіп, эксцентриситет эллипстің формасын сипаттайды, яғни оның шеңберден ауытқуын сипаттайды.Шеңберді өзінің бір өсіне бір қалыпты сығу арқылы эллипс алуға болады. Центрі координата басымен беттесетін, радиусы $R = a$ шеңберді қарастырайық (8-сурет). $P(X,Y)$ шеңбер бойындағы нүкте болсын. Сонда шеңбер теңдеуі $X^2 + Y^2 = a^2$ болады. Оны былайша жазайық: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1.$

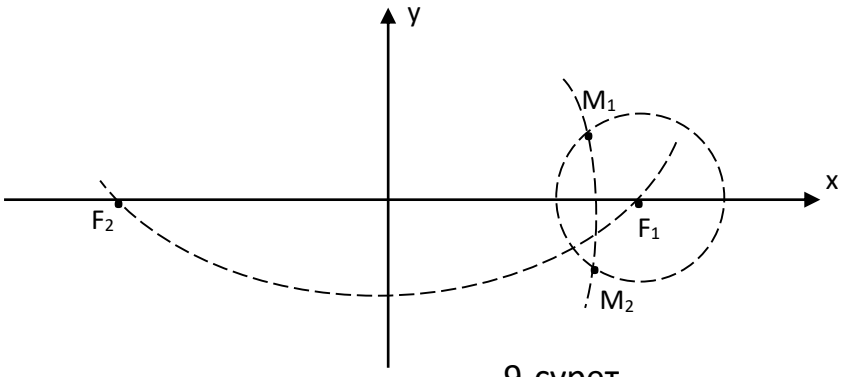
Жазықтық $Oy$ өсіне параллель бағытта $P(X,Y)$ шеңбердің нүктесі $x = X, \quad y = \frac{b}{a}Y$ болатын $P(x,y)$ нүктеге көшетіндей етіп сығылсын. Осындай сығудан шыққан $P(x,y)$ нүктелердің жиыны жарты өсі $a$ және $b$ болатын эллипс болады. Шынында да:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a}Y\right)^2}{b^2} = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1.$$

Сонымен $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсі шықты.

**6. ЭЛЛИПСТІ САЛУ.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ теңдеуімен берілсін. Осы эллипсті салу үшін өзара перпендикуляр екі түзу алады да, олардың қиылысу нүктесінен $OA = a, \quad OB = b$ кесінділерін өлшеп саламыз.

*B* нүктеден $a$ радиуспен шеңбер сызамыз, оның *OA* түзумен қиылысу нүктесі $F_1, F_2$ фокустар болады (9-сурет). Өйткені $BF_1 + BF_2 = a + a = 2a$ болады. Еркін алынған $r_1$ радиуспен $F_1$ нүктені, $2a - r_1$ радиуспен $F_2$ нүктені центр етіп шеңбер саламыз.




9-сурет

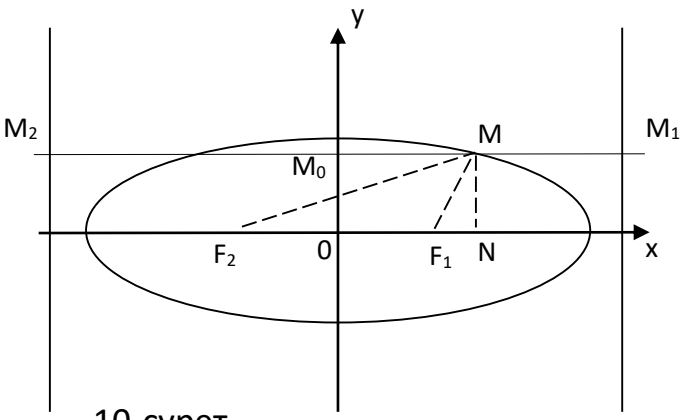
Ол шеңбердің қиылысу нүктесі $M_1$ мен $M_2$ эллипстің нүктелері болады. Өйткені $F_1M_1 + F_2M_1 = r_1 + 2a - r_2 = 2a$ болады. Одан соң $r_1$-ді аздап өзгертіп, осы процесті қайталау арқылы эллипстің басқа нүктелерін саламыз. Осы салынған нүктелерді лекалмен немесе қолмен жазық сызық арқылы қосса эллипс салынады.

**7.ЭЛЛИПСТІҢ ДИРЕКТРИСАСЫ.** Эллипстің директрисасы деп фокустық өсіне перпендикуляр болатын және центрден $\frac{a}{\varepsilon}$ қашықтықта өтетін екі түзуді айтады.

Анықтамадан директриса теңдеуі

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ және } x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad (2.10)$$

болатыны шығады (10-сурет). Мұның біріншісін оң, екіншісін сол директриса дейік. Эллипс үшін $\varepsilon < 1$ болатындықтан $x = \frac{a}{\varepsilon} > a$ болады. Сондықтан эллипстің директрисалары эллипстен тыс жатады.



10-сурет

Эллипс бойынан кез-келген $M(x,y)$ нүктесін алайық. Ол нүкте мен фокустардың ара қашықтығы $F_1M=r_1$, $F_2M=r_2$ $M$ нүктенің фокустық радиустері делінеді. Бұл нүктеден сол және оң директрисаға дейінгі қашықтықтарды $MM_2=d_2$, $MM_1=d_1$ деп белгілейік. Сонда мынадай теорема орындалады.

**Теорема.** Эллипстің кез-келген нүктесінің фокустарға дейінгі қашықтықтарының сол фокус жағындағы директрисаға дейінгі қашықтықтарына қатынасы тұрақты болады және ол сол эллипстің эксцентриситетіне тең болады, яғни

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon \qquad (2.11)$$

болады.

**Дәлелі.** (2.7) бойынша $r_1=a-\varepsilon x,\ \ r_2=a+\varepsilon x$ болады. Ал, $M$ нүктеден директрисаға дейінгі қашықтықтар

$$d_1=MM_1=M_0M_1-M_0M=\frac{a}{\varepsilon}-x,$$

$$d_2=MM_2=MM_0+M_0M_2=x+\frac{a}{\varepsilon}.$$

Сонда

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon}-x\right)}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon \quad \text{және} \quad \frac{r_2}{d_2}=\frac{a+\varepsilon x}{x+\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{\varepsilon\left(x+\frac{a}{\varepsilon}\right)}{x+\frac{a}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

теорема дәлелденілді.

**8.ЭЛЛИПСТІҢ ПАРАМЕТРЛІК ТЕҢДЕУІ.**Центрі координата басында жататын, радиусы $R=a$ шеңберді $x=X,\quad y=\frac{b}{a}Y$ формуламен $Ox$ өсіне перпендикуляр бағытта сықсақ, онда шеңбердің $P(X,Y)$ нүктесі эллипстегі $P(x,y)$ нүктесіне көшетінін жоғарыда айттық, ол эллипстің теңдеуі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ болатын еді:

Осы кезде $P$ нүктесінің радиус-векторы $OP$ мен $Ox$ өсі арасындағы бұрыш $t$ десек (6-сурет), онда $X=OP\cos t=a\cos t,\quad Y=a\sin t$ болар еді. Ал, $x=X,\quad y=\frac{b}{a}Y$ болғандықтан $X=x,\quad Y=\frac{b}{a}y$ болады да $x=a\cos t,$ $\frac{a}{b}y=a\sin t\Rightarrow y=b\sin t$, яғни

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t \qquad (2.12)$$

(мұндағы $0\le t\le 2\pi$) теңдеу алар едік. Ол эллипстің теңдеуі болады. Өйткені мұны эллипстің канондық теңдеуіне қойсақ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

болып, $P(x,y)$нүктенің координаталары эллипстің теңдеуін қанағаттандырады. Ол теңдеуді эллипстің параметрлік теңдеуідейді.

**1-мысал.** $9x^2+16y^2=144$ эллипстің параметрлік теңдеуін жазу керек.

**Шешуі.** Эллипс теңдеуін канондық түрге келтірейік $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, бұдан $a^2=16,\quad b^2=9,$ демек $a=4,\quad b=3.$ Сонда (2.12) бойынша $x=4\cos t,\quad y=3\sin t$ іздеген параметрлік теңдеу болады.

**2-мысал.** Эллипстің параметрлік теңдеуі $x=5\cos t,\quad y=3\sin t$ берілген. Оның канондық теңдеуін жазу керек.

**Шешуі.** Бұл жағдай $a=5,\quad b=3.$ Сондықтан эллипстің канондық теңдеуі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Шеңбер дегеніміз не және оның канондық теңдеуі қалай жазылады?
2. Шеңбердің жалпы теңдеуін канондық түрге қалай келтіруге болады?
3. Эллипс дегеніміз не және оның канондық теңдеуі қалай қорытылады?
4. Эллипстің негізгі элементтері (фокустары, жарты осьтері, эксцентриситеті) қалай анықталады?
5. Эллипстің канондық теңдеуі арқылы оның симметриясын, төбелерін және геометриялық формасын қалай зерттеуге болады?