21-дәріс. Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш
22 - дәріс. Түзу мен жазықтықтың қиылысуы. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

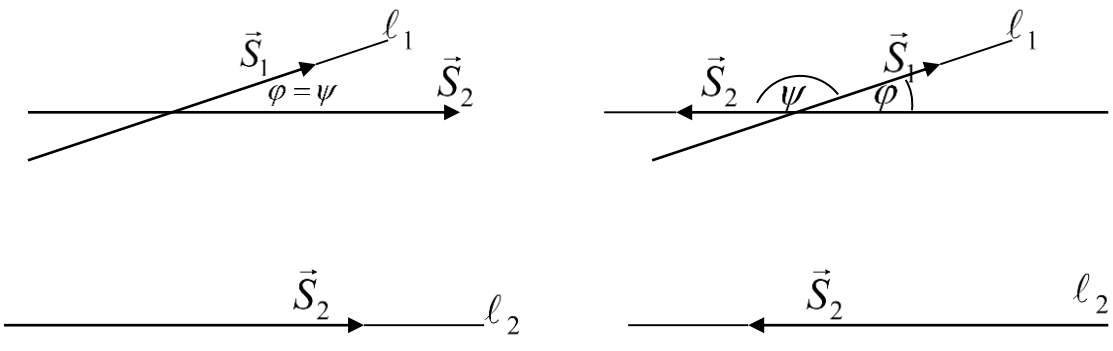
Дәріс жоспары:

1. Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш және оны есептеу формуласы.
2. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш, олардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
3. Түзу мен жазықтықтың қиылысу шарттары және қиылысу нүктесін анықтау.
4. Кеңістіктегі нүктеден түзуге дейінгі қашықтық және оны есептеу тәсілдері.

Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш

Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш жазықтықтағы түзулер арасындағы бұрышты есептеу жолымен табылады. l_1 және l_2 екі түзу берілсін, олар арасындағы бұрыштың шамасын φ арқылы, ал ол түзулердің бағыттаушы векторларының арасындағы бұрыштың шамасын ψ арқылы белгілейік. Сонда, егер $\psi \le 90^0$ (2а-сурет) болса, онда $\varphi = \psi$, ал $\varphi > 90^0$ болса (2б- сурет), онда $\varphi = 180^0 - \psi$ болады. Екі жағдайда да $\cos\varphi = |\cos\psi|$ болатыны айқын. Екі вектордың арасындағы бұрышты табу формуласы бойынша (I-тарау, §13).

$$\cos\psi = \cos\left(\vec{S}_1, \vec{S}_2\right) = \frac{\vec{S}_1\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|} \text{ демек, } \cos\varphi = \frac{\left|\vec{S}_1\vec{S}_2\right|}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}.$$



а) б)

2-сурет

Түзулер канондық теңдеулермен берілсін.

l_1 түзу: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{l_1},$

l_2 түзу: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{l_2}.$

Сонда бұл түзулер арасындағы φ бұрышы мына формуламен анықталады

$$\cos\varphi=\left|\cos\psi\right|=\frac{\left|\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right|}{\left|\vec{S}_1\right|\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+l_1l_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+l_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+l_2^2}}. \qquad (6.1)$$

Егер екі түзудің бірі (немесе екеуі де) канондық емес теңдеулерімен берілсе, онда бұрышты есептеу үшін осы түзулердің бағыттаушы векторларының координаталарын табу керек, содан соң (6.1) формуласын қолдану керек.

Мысал. $\dfrac{x+3}{-\sqrt{2}}=\dfrac{y}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-7}{-2},\ \ \dfrac{x}{\sqrt{3}}=\dfrac{y+1}{\sqrt{3}}=\dfrac{z-1}{\sqrt{6}}$ түзулерінің арасындағы бұрышты табайық.

Шешуі. Түзулердің бағыттаушы векторлары $\vec{S}_1=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},-2\right)$ және $\vec{S}_2=\left(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{6}\right)$ болады. Сонда (6.1) формула бойынша

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2\sqrt{6}\right|}{\sqrt{2+2+4}\sqrt{4+3+6}}=\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}.$$

Демек, берілген түзулер арасындағы бұрыш 60^0. Егер берілген l_1, l_2 түзулер параллель болса, онда олардың бағыттаушы векторлары $\vec{S}_1=\left(m_1,n_1,l_1\right)$ мен $\vec{S}_2=\left(m_2,n_2,l_2\right)$ коллинеар болады. Ал, коллинеар векторлардың сәйкес координаталары пропорционал болады. Сондықтан екі түзудің параллель болуының қажетті және жеткілікті шарты:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{l_1}{l_2}. \qquad (6.2)$$

болады.

Егер берілген түзулер перпендикуляр болса, онда олардың бағыттаушы векторлары арасындағы бұрыш тік болады. Сондықтан олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады: $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0$. Сондықтан екі түзудің перпендикуляр болуының қажетті және жеткілікті шарты:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + l_1 \cdot l_2 = 0 \qquad (6.3)$$

болып табылады.

Мысал. а) $\frac{x-0{,}3}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-13}$ және $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+2}{2}$;

б) $2x-3y+8=0, \quad 4x-2y-2z+1=0$ және $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4}$;

в) $x = 2+2t, \quad y = 4+3t, \quad z = 4+t$ және $2x+y-5=0, \quad 3y-2z+9=0$ түзулерінің парлары ішінен параллель және перпендикуляр түзулер парларын көрсету керек.

Шешуі. **а)** Бағыттаушы векторлары $\vec{S}_1 = (2, 4, -13)$ және $\vec{S}_2 = (3, 5, 2)$ екені айқын, олар коллинеар емес. Демек, түзулер параллель емес. Перпендикулярлық шартын тексереміз: $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + l_1 \cdot l_2 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 13 \cdot 2 = 0$. Түзулер перпендикуляр.

б) Екінші түзудің бағыттаушы векторларының координаталары $\vec{S}_2 = (3, 2, 4)$. Бірінші түзудің бағыттаушы векторы ретінде осы түзуді беретін жазықтықтардың $\vec{N}_1 = (2, -3, 0)$ мен $\vec{N}_2 = (4, -2, -2)$ нормальдық векторларының векторлық көбейтіндісін алуға болады:

$$\vec{S}_1 = \left[\vec{N}_1 \vec{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}.$$

(6.2) шарт орындалады, өйткені $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$, түзулер параллель.

в) Бірінші түзудің бағыттаушы векторының координаталары $\vec{S}_1 = (2, 3, 1)$. Екінші түзудің теңдеуі канондық түрге оңай келтіріледі:

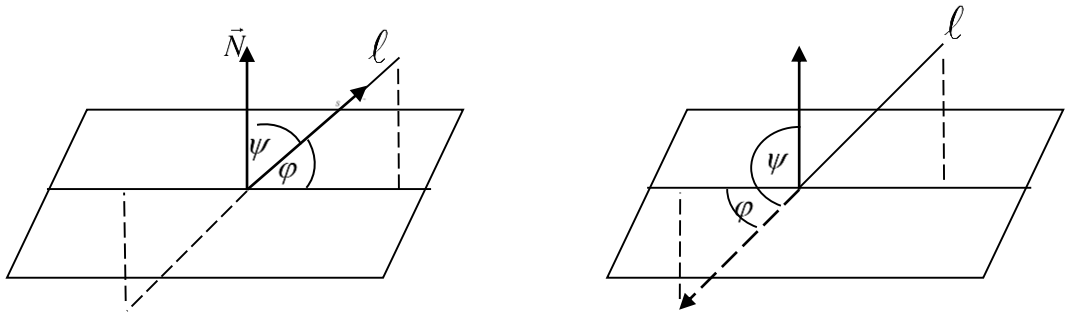
$$\frac{x-2{,}5}{-0{,}5}=y=\frac{z-4{,}5}{1{,}5}.$$

Демек $\vec{S}_2=\left(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$, $\vec{S}_1$ мен $\vec{S}_2$ векторлары параллель емес. Олар перпендикуляр да емес, өйткені $m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+l_1\cdot l_2=$ $=2\cdot(-0{,}5)+3+1{,}5\neq 0$. Берілген түзулер параллель де, перпендикуляр да емес.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш

Тікбұрышты координаталар жүйесінде жалпы теңдеумен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтық және канондық теңдеумен $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$ түзу берілсін (3-сурет).

Анықтама. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш φ деп, оның жазықтыққа түсірілген проекциясы мен түзудің арасындағы кез келген екі сыбайлас бұрыштың біреуін айтамыз.



а) б)

3-сурет

Егер түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты φ, ал түзу мен жазықтықтың нормалы арасындағы бұрышты ψ десек, онда $\psi\le\frac{\pi}{2}$ болған кезде $\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$ болады. (3а-сурет), ал $\psi>\frac{\pi}{2}$ болған кезде $\varphi=\psi-\frac{\pi}{2}$ болады (3б-сурет). Бұл жағдайдың біріншісінде $\sin\varphi=\cos\psi$, екінші

жағдайда $\sin\varphi = -\cos\psi$ болады. Сөйтіп, кез келген φ үшін $\sin\varphi = |cos\psi|$ болып шығады екен. Векторлардың скаляр көбейтіндісі бойынша

$$\cos\psi = \cos\left(\vec{S}, \wedge \vec{N}\right) = \frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{S}\right|\left|\vec{N}\right|}$$

болатынын және $\vec{S} = (m, n, l)$, $\vec{N} = (A, B, C)$ екенін ескеріп, түзу мен жазықтық арасындағы φ бұрышы мына формуламен анықталады:

$$\sin\varphi = \frac{|mA + nB + lC|}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (7.1)$$

Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда $\varphi = 0^0$ болады, ал $\sin 0^0 = 0$ болатындықтан (7.1) –ден түзу мен жазықтықтың параллель болуынан қажетті және жеткілікті шартын аламыз:

$$mA + nB + lC = 0. \qquad (7.2)$$

Егер түзу мен жазықтық перпендикуляр болса, онда түзу жазықтықтан нормаль векторына параллель болады да $\vec{S} = (m, n, l)$ және $\vec{N} = (A, B, C)$ коллинеар болады. Сондықтан сәйкес координаталар қатынасы тең болады. Сөйтіп, түзу мен жазықтықтың перпендикуляр болуының қажетті және жеткілікті шарты төмендегідей болады:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l}. \qquad (7.3)$$

Мысал. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышты есептеу керек:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{-1}$ және $4x + y + z + 13 = 0$;

б) $x = 2 - 3t,\quad y = 1 - t,\quad x = -4t$ және $x + 2y - z + 1 = 0$;

в) $3x - 2y + z + 1 = 0,\quad 4x - 3y + 4z = 0$ және $2x - y - 2z + 5 = 0$.

Шешуі. **а)** Берілген жағдайда $\vec{S} = (2, 2, -1)$, $\vec{N} = (4, 1, 1)$ (7.1) формуласы бойынша іздеген бұрыштың синусын есептейміз:

$\sin\varphi = \frac{|2\cdot 4 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+1+1}} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш 45^0-ке тең.

б) $\vec{S}=(-3,-1,-4)$ және $\vec{N}=(1,2,-1)$ болғандықтан,

$$\sin\varphi=\frac{|3-2+4|}{\sqrt{9+1+16}\,\sqrt{1+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{26}\,\sqrt{6}}=\frac{1}{2\sqrt{39}}\approx 0{,}08.$$

Синустар таблицасы бойынша $\varphi\approx 5^0$ екенін табамыз.

в) Түзудің бағыттаушы векторы ретінде түзуді беретін жазықтықтардың нормальдық $\vec{N}_1=(3,-2,1)$ және $\vec{N}_2=(4,-3,4)$ векторларының векторлық көбейтіндісін аламыз. Оның координаталарын табамыз:

$\vec{S}=\left[\vec{N}_1\vec{N}_2\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & -3 & 4\end{vmatrix}=-5\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$. Берілген жазықтықтың нормаль векторының координаталарын оның теңдеуінен табамыз: $\vec{N}=(2,-1,-2)$

(7.1) формуласы бойынша іздеген бұрыштың синусын есептейміз:

$$\sin\varphi=\frac{|-10+8+2|}{\sqrt{25+64+1}\,\sqrt{4+1+4}}=0$$

Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш 0^0-ге тең.

Түзу мен жазықтықтың қиылысуы

Тік бұрышты координаталар жүйесінде берілген $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$ түзуі мен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтығын қарастырайық. Олардың ортақ нүктесінің координаталары теңдеу екеуінде қанағаттандыратындықтан, ол нүктені табу үшін бұл екі теңдеуді бір жүйеге алып шешуіміз керек:

$$\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{l}.\end{cases}$$

Түзу теңдеуіндегі қатынасты t десек:

$$x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+lt \qquad (8.1)$$

болады, оны жазықтық теңдеуіне қойсақ:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + lt) + D = 0.$$

Бұдан $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Am + Bn + Cl) = 0,$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{Am + Bn + Cl}. \qquad (8.2)$$

Соңғы теңдіктен: **а)** Егерде $Am + Bn + Cl \neq 0$ болса, онда (8.2) –ден t бір мәнді анықталады, сондықтан (8.1) –ден x, y, z -те бір мәнді табылады. Демек түзу мен жазықтық бір нүктеде қиылысады.

б) Егерде $Am + Bn + Cl = 0$, ал $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ болса (8.2) –ден t табылмайды (өйткені $0 \cdot t = a$ болатын t-жоқ). Сондықтан (8.1) –ден x, y, z табылмайды, яғни түзу мен жазықтық қиылыспайды, демек олар параллель болады.

в) Егерде $Am + Bn + Cl = 0,\quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ болса, онда (8.2) –ні шексіз көп t қанағаттандырады (өйткені $0 \cdot t = 0$-ны кез келген сан қанағаттандырады). Сондықтан (8.1) шексіз көп (x, y, z) үштік табылады. Демек, бұл кезде түзу мен жазықтық шексіз көп нүктеде қиылысады, яғни түзу толығымен жазықтықта жатады.

Сөйтіп түзу мен жазықтықтың бір нүктеде қиылысу шарты

$$Am + Bn + Cl \neq 0. \qquad (8.3)$$

Параллель болу шарты:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cl = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Түзудің жазықтықта жату шарты:

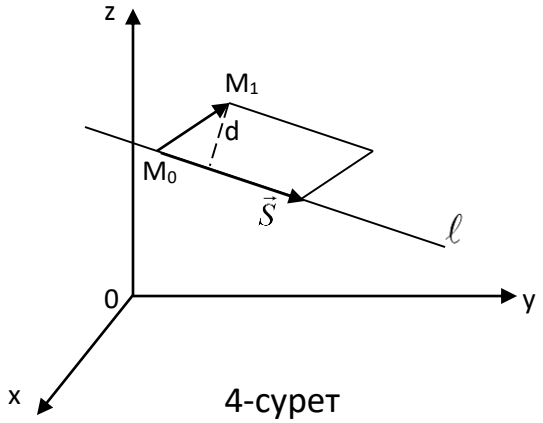
$$\begin{cases} Am + Bn + Cl = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \qquad (8.5)$$

болады.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

Кеңістікте $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі және түзудің $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{l}$ теңдеуі берілген. Осы берілген нүктеден берілген түзуге дейінгі қашықтықты табайық. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте түзуде жатады, ол түзуден бағыттаушы векторы $\vec{S}=(m, n, l)$ M_0-ден шығатындай болып орналассын. Сонда

$M_0(x_0, y_0, z_0)L$ түзуден



4-сурет

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте түзуде жатады, ол түзуден бағыттаушы векторы $\vec{S}=(m, n, l)$ M_0-ден шығатындай болып орналассын. Сонда $M_0(x_0, y_0, z_0)L$ түзуден қашықтығы d бағыттаушы вектор $\vec{S}=(m, n, l)$ мен $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ векторлары қабырғалары болатын параллелограмның биіктігі болар еді (4-сурет). Параллелограмның ауданы $\overrightarrow{M_0M_1}$ мен $\vec{S}$ векторлардың векторлы көбейтіндісінің модуліне $\left\|\left[\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{S}\right]\right\|$ тең болатын. Сондықтан $d\cdot\left|\vec{S}\right|=\left\|\left[\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{S}\right]\right\|$ болады. Бұл теңдікті ондағы векторлардың координаталары арқылы жазсақ:

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2+n^2+l^2}} \quad (9.1)$$

болады. Міне осы формуламен нүктенің түзуден қашықтығы табылады.

Мысал. $M_1(2,3,1)$ нүктенің $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{5}$ түзуден қашықтығын табу керек.

Шешуі.Бұл кезде M_0(-1, 0, 2) болады. Сондықтан $\overrightarrow{M_0M}=(3,3,-1)$, ал $\vec{S}=(2,-1,3)$ болатындықтан

$$\left[\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{S}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=8\vec{i}-11\vec{j}-9\vec{k}$$ болады.

Сонда $d=\frac{\sqrt{8^2+(-11)^2+(-9)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{\sqrt{64+121+81}}{\sqrt{4+1+9}}=\sqrt{79}.$

Бақылау сұрақтары:

1. Кеңістіктегі екі түзудің арасындағы бұрыш қалай анықталады және қандай формуламен есептеледі?
2. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш қалай анықталады? Олардың параллель және перпендикуляр болу шарттары қандай?
3. Түзу мен жазықтықтың қиылысу шарты қандай?
4. Түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі қалай анықталады?
5. Кеңістіктегі нүктеден түзуге дейінгі қашықтық қалай анықталады және қандай формуламен есептеледі?