1-дәріс. Вектор ұғымы
2-дәріс. Жазықтықта векторды коллинеар емес екі векторға жіктеу. Жазықтықтағы базис.

Дәріс жоспары

1. Вектор ұғымы. Векторлардың түрлері және олардың қасиеттері.
2. Векторлардың теңдігі. Коллинеар және компланар векторлар.
3. Векторларды қосу және азайту.
4. Векторды санға көбейту және оның қасиеттері.

ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Аналитикалық геометрия пәні – геометриялық бейнелерді (формаларды) алгебралық талдау жәрдемімен зерттеу болып табылады. Элементар математиканың түрлі бөлімдерінде алгебра көптеген геометриялық мәселелерді шешуге қолданылады. Мысалы, геометрияда сан жәрдемімен кесінділер мен доғалардың ұзындықтары, түрлі фигуралардың аудандары, денелердің көлемдері анықталады. Математиканың бұл бөлімдерінде алгебралық талдау жәрдемімен геометриялық бейнелердің өлшемдері туралы мәселелер қарастырылып шешілсе, аналитикалық геометрияда сан арқылы ол бейнелердің негізгі ерекшелігі болып табылатын олардың пішіндері мен кеңістіктегі орны анықталады. Оларды анықтауда вектордың, векторлық алгебраның алар орны ерекше.

Математика мен физикада және механикада зерттелетін шамаларды екі топқа бөлуге болады. Бірінші топқа сан мәнімен толық анықталатын шамалар жатады. Оларға ұзындық, аудан, көлем, уақыт, бұрыш, температура, тығыздық, масса, жұмыс т.б. шамалар жатады. Егер үшбұрыш ауданы $10см^2$ десе, онда осы санмен ол үшбұрыштың ауданы толық анықталады. Осындай сан мәнімен толық анықталатын шамаларды скаляр шамалар немесе қысқаша скаляр дейді.

Екінші топқа сан мәнімен толық анықталмайтын шамалар жатады. Мысалы, күш, жылдамдық, үдеу, күш моменті т.б. тек сандық мәнімен ғана емес, бағытымен де сипатталатындығы физикадан белгілі. Бұл шамаларды толық сипаттау үшін, олардың сан мәндерімен қатар бағыты да белгілі болуы керек. Мұндай шамаларды векторлық шамалар деп атайды.

Векторлық шамаларға алгебралық амалдар қолдану, яғни векторларды өзара қосу, алу, векторларды санға көбейту, векторларды өзара скаляр және векторлық көбейту, бұл амалдардың қасиеттерін ашу және оны дәлелдеу – векторлық алгебраның қарастыратын мәселелері болып табылады.

ВЕКТОР ҰҒЫМЫ. Геометрияда нүктелердің кез-келген жиынын ***фигура*** дейді. Нүкте, түзу, жазықтық қарапайым фигураларға жатады, оларға анықтама берілмейді, олар алғашқы

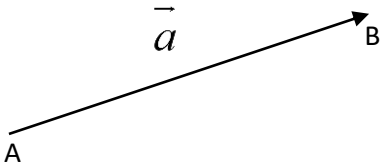
ұғым болып табылады.

Түзудің екі жағынан шектелген бөлігін ***кесінді*** дейді. Кесіндінің ұштары белгілі тәртіпте қарастырылса, яғни қай ұшы бастапқы нүкте, қай ұшы соңғы нүкте екені көрсетілсе, онда ол ***бағытталған кесінді*** делінеді. Бағытталған кесіндінің А бастапқы, В соңғы нүктесі болса, оны $\overline{AB}$ деп (төбесіне сызықша қойып) белгілейді. Бағытталған $\overline{AB}$ кесіндінің ұзындығы үшін, кәдімгі AB кесіндісінің ұзындығы алынады және ол $|\overline{AB}|$ не жай ғана AB арқылы белгіленеді.

Геометрияда кез-келген скаляр шаманы сан түзуінің кесіндісімен сипаттаса, векторлық шамаларды бағытталған кесінділермен сипаттайды, яғни векторлық шаманы белгілі ұзындығы және бағыты бар кесіндімен кескіндейді. Ол кесіндінің ұзындығы белгілі бір масштаб бірлігіндегі векторлық шаманың сандық мәніне тең болуы, ал бағыты оның бағытымен дәл келуі керек.

Анықтама. Вектор дегеніміз – бағытталған және басы мен соңы көрсетілген кесінді.

Сонымен, вектор ұзындығы және бағытымен анықталатын геометриялық құрылым. Егер А – вектордың бастапқы, В – соңғы нүктесі (немесе ұшы) болса, оны $\overrightarrow{AB}$ арқылы белгілейді. Вектордың бағыты басынан ұшына қарай алынады, суретте вектор ұшына стрелка қойылады. (1-сурет). Көпшілік жағдайда вектор бір ғана әріппен белгіленеді, мысалы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ т.с.с.



1-сурет

Анықтама. Вектордың модулі немесе ұзындығы деп, оның басы мен ұшының ара қашықтығын айтады. $\overrightarrow{AB}$ вектордың модулі $|\overrightarrow{AB}|$ немесе AB арқылы белгіленеді.

Вектор үш түрге бөлінеді: **байламды вектор, сырғымалы вектор, еркін вектор**.

Байламды вектор деп бастапқы нүктесі белгілі бір нүктеге бекітілген, одан басқа нүктеге көшіруге болмайтын векторды айтады. Мысалы, күш белгілі бір нүктеге байланысты болса, онда оны басқа жерге көшіруге болмайды.

Сырғымалы вектор деп бір түзудің бойымен жылжитын векторды айтады. Мысалы, қатты затқа әсер ететін күш немесе жылдамдық сырғымалы вектор болады. Мұндай вектор өзі орналасқан түзудің бойындағы кез-келген нүктеге көшіріледі, ал одан басқа түзудің бойындағы нүктеге көшіруге болмайды.

Еркін вектор деп сол вектор жатқан түзудің бойымен жылжытуға болатын және өзіне-өзі параллель көшірілетін векторды айтады, яғни вектордың бастапқы нүктесі кеңістіктегі кез-келген бір нүктеге көшірілетін болса, ондай вектор еркін вектор деп аталады. Механикада, физикада векторлардың осы үш түрі де кездеседі, ал аналитикалық геометрияда әрқашанда еркін векторлар қолданылады.

Бастапқы нүктесі мен соңғы нүктесі беттесетін векторларды **нөлдік вектор** дейді де, $\vec{0}$ арқылы белгілейді. Нөлдік вектордың белгілі бір бағыты болмайды, ал ұзындығы нөлге тең болады, яғни $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Анықтама. Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын векторларды **коллинеар** векторлар дейді.

Коллинеар векторлар не бағыттас не қарама-қарсы бағытта болады. Егер $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ бағыттас векторлар болса $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, қарама-қарсы бағытта болса $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ арқылы, коллинеар болса $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ арқылы белгіленеді. Нөлдік вектор кез-келген векторға бағыттас болады.

Анықтама. Нөлдік емес векторлардың бағыттары бірдей, ұзындықтары тең болса, онда олар тең векторлар делінеді. Барлық нөлдік векторлар тең деп саналады.

Сонымен $\vec{a} = \vec{b}$ болса, онда біріншіден $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$, екіншіден $\vec{a} // \vec{b}$, үшіншіден $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болуы керек. $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{BA}$ векторлар өзара тең болмайды, оларды бір-біріне қарама-қарсы векторлар дейді. Олар үшін $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ теңдігі дұрыс болады.

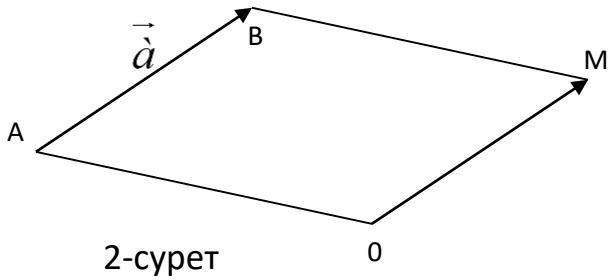
Векторлардың теңдігінің анықтамасынан мынадай тұжырымдар шығады:

1.Векторларды кеңістіктің кез-келген нүктесіне көшіруге болады. Сондықтан да аналитикалық геометрияда еркін векторлар қарастырылады;

2.Коллинеар векторларды бір түзуге көшіруге болады;

3.Кез-келген екі векторды бір жазықтықта жататындай етіп көшіруге болады;

4. $\vec{a}$ векторы мен 0 нүктесі үшін $O\vec{M} = \vec{a}$ болатын тек бір ғана М нүктесі болады. М нүктесін осылайша салу $\vec{a}$ векторын 0 нүктеден өлшеп салу делінеді.



2-сурет

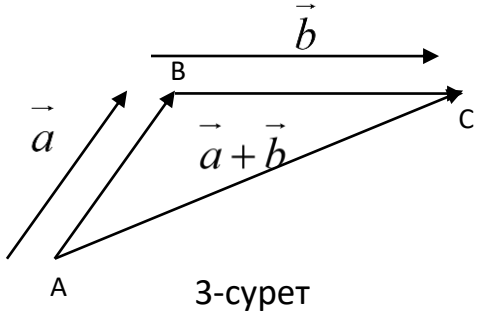
Егер $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ вектор 0 нүктеден өлшеп салынған болса немесе $\overrightarrow{0M}$ векторы $\vec{a}$ векторды параллель жылжытудан шыққан болса (2-сурет), онда $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{OM}$ әртүрлі векторлар болмайды, олар А мен 0 нүктеден бастап салынған бір ғана $\vec{a}$ векторын кескіндейді.

Анықтама.Ұзындығы бірге тең болатын векторды **бірлік вектор** деп атайды. Егер $\vec{a}$ бірлік вектор болса, онда оны $\vec{a}^0$ деп белгілейді, яғни $\left|\vec{a}^0\right| = 1$ болады.

ВЕКТОРЛАРДЫ ҚОСУ

Жазықтықта кез-келген екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілсін.

Анықтама.Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының қосындысы деп, кез-келген A нүктеден $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ және оның ұшы B нүктеден $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ векторларын өлшеп салғанда, оларды тұйықтайтын $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ векторын айтады және оны $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ немесе $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ деп жазады (3-сурет). Өлшеп салуда B мен C нүктелері бір мәнді анықталатындықтан, екі вектордың қосындысы болатын үшінші вектор да бір мәнді анықталады. Векторларды қосудың бұл әдісін – **үшбұрыш әдісі** дейді.



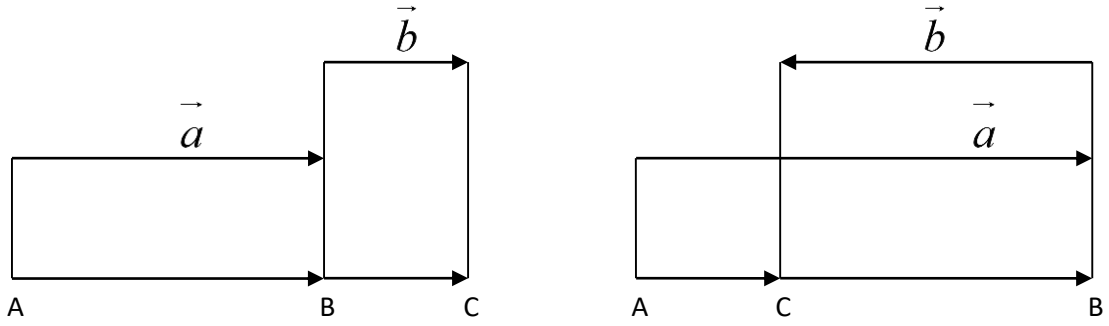
3-сурет

Векторды қосудың бұл анықтамасынан A, B, C нүктелері жазықтықта қалай орналасса да

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad (2.1)$$

теңдігінің дұрыстығы шығады.

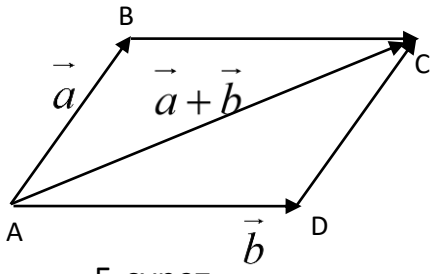
A, B, C нүктелерінің үшеуі де бір түзуге тиісті болғанда да (4а,б - сурет), сонымен бірге олардың кез-келген екеуі не тіпті үшеуі де беттесе түскен жағдайда да (2.1) теңдік орындалады.



а) б)

4-сурет

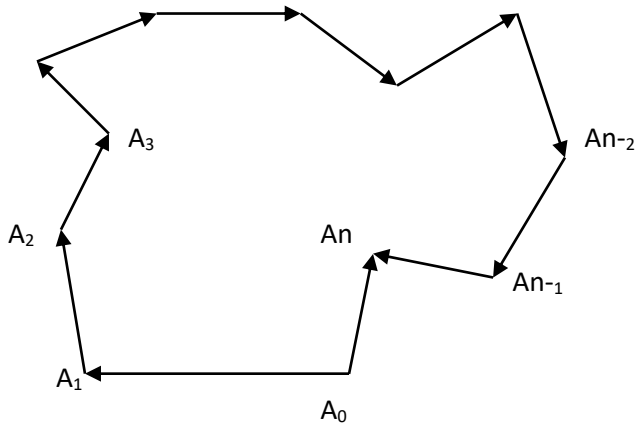
Егер 3-суреттегі ABC үшбұрышын параллелограмға дейін толықтырсақ (5-сурет), онда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ болатындықтан $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ болар еді. Бұдан векторларды қосудың жаңа ережесі шығады: $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларын қосу үшін, кез-келген A нүктеден $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ векторларын өлшеп салып, оны параллелограмға дейін толтырады. Сол параллелограмның A нүктеден шығатын диагоналы берілген вектордың қосындысына тең болады. Векторларды қосудың бұл әдісін **параллелограмм әдісі** (ережесі) дейді.



5-сурет

Векторларды қосудың үшбұрыш әдісін екіден көп кез-келген санды векторлар үшін де қолдануға болады. Мысалы, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ векторлардың қосындысын табу үшін, кез-келген A_0 нүктеден (6-сурет) $\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_2$,..., $\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} = \vec{a}_{n-1}$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \vec{a}$ векторларын өлшеп салады. Сонда бірінші вектордың бастапқы нүктесімен соңғы вектордың соңғы нүктесін қосатын және соған қарай бағытталған $\overrightarrow{A_0A_n}$ вектор берілген n векторлардың қосындысына тең болады:

$$\overrightarrow{A_0A_n} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \\ + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \\ = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n .$$



6-сурет

Векторларды қосудың бұл әдісі – **көпбұрыш әдісі** делінеді.

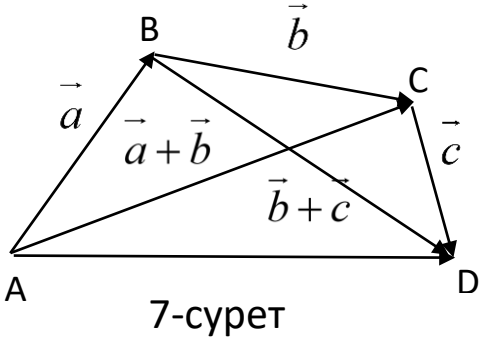
Векторларды қосу амалының негізгі қасиеттерін қарастырайық.

1⁰. Кез-келген $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары үшін ауыстырымдылық (коммутативтік) заңы орындалады, яғни $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ болады.

Дәлелі: Бұл қасиеттің дәлелі 5-суреттен тікелей шығады, ол сурет $\vec{a}$ векторын өзіне-өзін параллель етіп A және D нүктелерге, $\vec{b}$ векторын A және $\hat{B}$ нүктеге көшіруден шыққан. Сонда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ болатындықтан $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ болып шығады.

2⁰.Кез келген $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ үш векторлар үшін терімділік (ассоциативтік) заңы орындалады, яғни $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ болады.

Дәлелі: Берілген векторларды өздеріне параллель көшіру арқылы, кез-келген A нүктеден $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, оның ұшынан $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, оның ұшынан $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ векторлар өлшеп салынған (7-сурет). Сонда векторларды қосудың үшбұрыш әдісі бойынша: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$,



7-сурет

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{b}+\vec{c}$,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

болатындықтан және

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ болар еді. Бұдан $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ болады.

3⁰. Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ теңдігі орындалады.

Дәлелі: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ болсын, екінші қосылғыш нөлдік вектор болғандықтан, оны $\overrightarrow{BB}=0$ түрінде жазамыз. Сонда үшбұрыш ережесі бойынша $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ болады. Демек, $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4⁰. Кез келген $\vec{a}$ векторы мен оған қарама-қарсы ($-\vec{a}$) векторының қосындысы нөлдік векторға тең болады, яғни $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ болады.

Дәлелі: Егер $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ болса, онда $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ болады. Сонда $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ болар еді. Демек, $\vec{a}+(-\vec{a})=0$ болады.

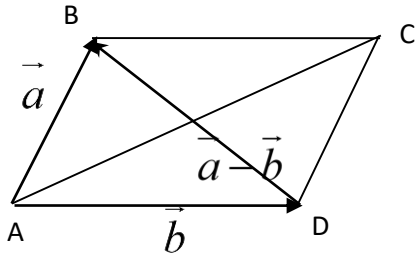
ВЕКТОРЛАРДЫҢ АЙЫРЫМЫ

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымы деп, $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ теңдігін қанағаттандыратын үшінші бір $\vec{c}$ векторын айтады. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымын $\vec{a}-\vec{b}$ деп белгілейді. Сонда $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ болады. Мұндағы $\vec{a}$-азайғыш, $\vec{b}$-азайтқыш векторлар делінеді. Сонымен анықтама бойынша $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}$.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының айырымы ($\vec{a}-\vec{b}$)-ны салу үшін, параллель жылжыту арқылы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторларды бір A нүктесіне көшіреміз (8-сурет), олардың ұштарын қосамыз. Сонда $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$. Сөйтіп

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}. \qquad (3.1)$$

Сонымен, екі вектордың айырымын салу үшін ол векторларды бір нүктеден шығатындай етіп салып, азайтқыш вектордың ұшын азайғыш вектордың ұшына қосса болғаны. Басқаша айтқанда, векторлар айырымы $\vec{a}-\vec{b}$ салу үшін $\vec{a}$-на $\vec{b}$ векторға қарама-қарсы ($-\vec{b}$) векторды қосады (8-сурет).



8-сурет

Енді параллелограмм ережесін жалпы түрде тұжырымдауға болады. Егер бір A нүктесінен шығатындай етіп $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ векторларын өлшеп салып, оны параллелограммға дейін толықтырсақ (8-сурет), онда сол A нүктесінен шығатын оның AC диагоналы берілген векторлардың қосындысына, екінші диагоналы айырымына тең болатын векторды кескіндейді, яғни $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{a}$ болады.

Теорема. Кез-келген екі вектордың айырымы болады және ол жалғыз-ақ болады.

Дәлелі. $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген. Оларды өзіне-өзін параллель жылжыту арқылы A нүктесінен шығатындай етіп орналастырайық (8-сурет). Сонда $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ болады. Өйткені $\vec{a}=\overrightarrow{DB}+\vec{b}$ немесе $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$. Сондықтан, $\overrightarrow{DB}$ әрқашан да болады.

Енді айырымның жалғыз болатындығын дәлелдейік. Қарсы жориық. Айырым екі түрлі болсын: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ және $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$. Онда векторлардың айырымының анықтамасы бойынша $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ және $\vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$ болуы керек. Соңғы теңдіктен $\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$ болар еді. Бұл теңдіктің екі жағына да $(-\vec{b})$ қосса: $\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{b})=\vec{b}+\vec{d}+(-\vec{b})$, бұдан $\vec{c}-(\vec{b}-\vec{b})=\vec{d}+(\vec{b}-\vec{b})$, $\vec{c}=\vec{d}$ болып шығады. Сөйтіп, $\vec{c}$ мен $\vec{d}$ бір вектор болады.

ВЕКТОРЛАРДЫ САНҒА КӨБЕЙТУ

Анықтама.Нөлдік емес $\vec{a}$ векторы мен нақты $\lambda\neq 0$ санының көбейтіндісі деп, ұзындығы $|\lambda|\ |\vec{a}|$-ға тең болатын және бағыты $\lambda>0$ болғанда $\vec{a}$ векторымен бағыттас, $\lambda<0$ болғанда $\vec{a}$ векторының бағытына қарама-қарсы болатын векторды айтады және оны $\lambda\vec{a}$ деп белгілейді.

Анықтама бойынша: а) кез келген $\vec{a}$ векторы мен λ саны үшін $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$ болады; б) векторларды санға көбейткенде оған коллинеар вектор шығады.

Вектордың санға көбейту анықтамасынан тікелей мына тұжырымдардың дұрыстығы шығады:

1)Кез келген вектордың нөлге көбейтіндісі нөлдік вектор болады. Шынында да $0\cdot\vec{a}=\vec{b}$ десек, онда анықтама бойынша $\vec{b}$ вектордың модулі $|\vec{b}|=0\cdot|\vec{a}|$ болуы керек. Ал, бұл теңдіктің оң жағы нөлге тең. Сондықтан $\vec{b}$ вектор нөлдік вектор. Сонымен $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

2)Нөлдік вектордың кез-келген санға көбейтіндісі нөлдік вектор болады.

Шынында да $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{c}$ десек, онда анықтама бойынша $\vec{c}$ вектордың модулі $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{0}|=|\lambda|\cdot 0$ болады. Ал, мұның оң жағы нөлге тең. Сондықтан $\vec{c}$ векторы нөлдік вектор болады. Сонымен $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

3)Кез-келген вектордың өзінің модуліне қатынасы өзімен бағыттас нөлдік вектор болады.

Шынында да кез-келген $\vec{a}$ және онымен бағыттас $\vec{e}$ бірлік векторы берілсін. Сонда векторды санға көбейту анықтамасы бойынша $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{e}$ болар

еді. Мұны $\frac{1}{|\vec{a}|}$ санына көбейтсек $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ болып шығады. Ал, бұл $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ векторы бірлік вектор деген сөз. Оны $\vec{a}^0$ түрінде белгілеп, $\vec{a}$ векторының **бірлік векторы** немесе **орты** деп атайды. Сонымен $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}^0$ бұдан $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^0$ болады. Дәл осы сияқты $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$ бірлік вектор болады.

Векторды санға көбейтудің төмендегідей қасиеттері бар:

1^0. Кез-келген $\vec{a}$ векторы үшін $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ болады (сан көбейткіш 1-дің ерекше ролі);

2^0. Кез-келген λ,μ сандары және $\vec{a}$ векторы үшін $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ болады (сан көбейткішке қатысты терімділік қасиеті);

3^0. Кез-келген λ,μ сандары және $\vec{a}$ векторы үшін $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ болады (сан көбейткіштерге қатысты үлестірімділік қасиеті);

4^0. Кез-келген λ саны мен $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторы үшін $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ болады (векторлардың қосындысына қатысты үлестірімділік қасиеті);

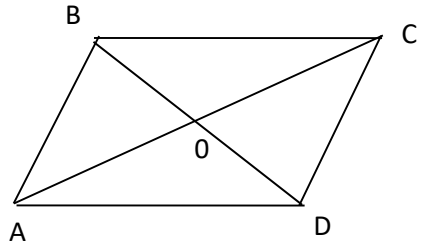
Дәлелі. 1^0 қасиетінің дәлелі сан мен вектордың көбейтіндісінің анықтамасынан тікелей шығады.

Шынында да $1\cdot\vec{a}$ векторы мен $\vec{a}$ векторының модулдері теңдей: $|1\cdot\vec{a}|=|1|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|$ және $|\vec{a}|$. Олардың бағыттары да бірдей. Сондықтан анықтама бойынша $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ болады. Сол анықтама бойынша $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$ болады, өйткені бұлардың модулдері бірдей $|-1\cdot\vec{a}|=|-1|\cdot|\vec{a}|=|\vec{a}|$ және $|-\vec{a}|$, ал олардың бағыттары бірдей. Сондықтан $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$ болады.

2^0 - қасиетінің дәлелдемесі. Егер $\vec{a}=0$ немесе $\lambda\mu=0$ болса, онда $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ теңдіктің дұрыстығы айқын, өйткені теңдіктің екі жағы да нөлдік вектор болады. Енді $\vec{a}\neq\vec{0},,\ \lambda\mu\neq0$ болсын. $\vec{a}=\overrightarrow{0A}$ дейік. Сонда, $\lambda(\mu\overrightarrow{0A})$ және $(\lambda\mu)\overrightarrow{0A}$ векторлары $0A$ түзуінің бойында жатар еді және ұзындықтары $|\lambda||\mu||\overrightarrow{0A}|$-ға тең болар еді. Ал, бағыттары $\lambda\mu>0$ болғанда $\vec{a}=\overrightarrow{0A}$ векторымен бағыттас, $\lambda\mu<0$ болғанда $\vec{a}$-ға қарама-қарсы бағытта

болар еді. Сөйтіп, $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ болып шығады. Сонымен, 2^0 - қасиет дәлелденді. Қалған қасиеттерді дәлелдеуді студенттерге ұсынамыз.

1-мысал. $ABCD$ ромбы, O оның диагоналдарының қиылысу нүктесі болсын. Мына теңдіктегі: а) $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CO}$; г) $\overrightarrow{BB} = \lambda\overrightarrow{OB}$; λ көбейткішті табу керек (9-сурет).



9-сурет

а) $\overrightarrow{OC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CA}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{OC}\right|$ болатындықтан $\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ болады, $\lambda = -\frac{1}{2}$. б) $\overrightarrow{BD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BO}$, $\left|\overrightarrow{BD}\right| = 2\left|\overrightarrow{BO}\right|$ болғандықтан, $\overrightarrow{BD} = 2\cdot\overrightarrow{BO}$, яғни $\lambda = 2$ болады. в) $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CO}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{CO}\right|$ болғандықтан, $\overrightarrow{AC} = -2\cdot\overrightarrow{CO}$, $\lambda = -2$ болады. г) $\left|\overrightarrow{BB}\right| = 0$, $\left|\overrightarrow{BD}\right| \neq 0$ болғандықтан, $\overrightarrow{BB} = 0\cdot\overrightarrow{BD}$, $\lambda = 0$ болады.

Теорема. (коллинеарлық белгісі). $\vec{a}$ векторы мен нөлдік емес $\vec{b}$ векторына коллинеар болуы үшін

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \qquad (4.1)$$

теңдігін қанағаттандыратын бір ғана нақты λ санының бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. ҚАЖЕТТІГІ. $\vec{a}$ векторы 0-дік емес $\vec{b}$ векторына коллинеар болсын. Келесі үш жағдайдың болуы мүмкін: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, $\vec{a} = 0$. Егер $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$, яғни (4.1) теңдігі $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ болғанда орындалады. Егер $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ болса, онда $\vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$, яғни (4.1) теңдігі $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ болғанда орындалады. Егер $\vec{a} = 0$ болса, онда $\vec{a} = 0\cdot\vec{b}$, яғни (4.1) теңдік $\lambda = 0$ болғанда орындалады.

ЖЕТКІЛІКТІЛІГІ. Егер (4.1) теңдігі қайсыбір λ саны үшін орындалса, онда векторды санға көбейтудің және коллинеар векторлардың анықтамалары бойынша $\vec{b}$ векторы мен $\vec{a}$ векторы коллинеар.

Бірден-бірлік. Теореманың шартын қанағаттандыратын тағы λ_1 саны табылады делік. Сонда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ және $\vec{a} = \lambda_1\vec{b}$, сондықтан $\vec{0} = \vec{a} - \vec{a} = \lambda\vec{b} - \lambda_1\vec{b} = (\lambda - \lambda_1)\vec{b}$. Бұдан $\vec{b} \neq 0$ болғандықтан, $\lambda - \lambda_1 = 0$, немесе $\lambda = \lambda_1$ екендігі шығады.

Мысал. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$ және $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ векторлары коллинеар болатынын дәлелдеу керек.

Шешуі. Векторларға қолданылатын амалдардың қасиеттерін пайдаланып, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \vec{0} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ екендігін аламыз. Сонымен $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} = -3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ вектор-ларының коллинеарлық белгісі бойынша есеп шартындағы векторлар коллинеар.

ВЕКТОРЛАРДЫҢ СЫЗЫҚТЫҚ ТӘУЕЛДІЛІГІ ЖӘНЕ СЫЗЫҚТЫҚ ТӘУЕЛСІЗДІГІ

n вектордан тұратын $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлар жүйесі берілсін. Мына түрдегі өрнекті $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n$ (мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ кез-келген нақты сандар) берілген векторлар жүйесінің сызықтық комбинациясы, ал $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сандарын оның коэффициенттері дейді. Мысалы, $2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ өрнегі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларының сызықтық комбинациясы болады, оның коэффициенттері $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 5, \alpha_3 = -3$. Берілген векторлар жүйесінің сызықтық комбинациясы нақты бір векторды анықтайды, ол $\vec{a}$ векторы болсын:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n. \qquad (5.1)$$

Осылайша өрнектелген $\vec{a}$ векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторларының сызықтық комбинациясы болады немесе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторларға жіктеледі немесе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлары арқылы сызықтық өрнектеледі делінеді.

Анықтама. Егер кемінде біреуі нөлден өзгеше $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сандары табылып

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n = 0 \qquad (5.2)$$

теңдігі орындалса, онда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлар жүйесі **сызықтық тәуелді** делінеді.

Бұл анықтамадан, егер берілген векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болса, онда олардың бірі қалғандарының сызықтық комбинациясына тең болатыны шығады.

Шынында да, егер (5.2) теңдігінде $\alpha_n \neq 0$ болса, онда

$$\vec{e}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n}\vec{e}_2 - ... - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\vec{e}_{n-1} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + ... + \beta_{n-1}\vec{e}_{n-1}$$

болады. Керісінше де дұрыс, яғни берілген векторлар жүйесінің бірі қалғандарының сызықтық комбинациясы болса, онда ол жүйе сызықтық тәуелді болады.

Анықтама. Егер (5.2) теңдік тек $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ болған жағдайда ғана орындалатын болса, онда $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлар **сызықтық тәуелсіз** делінеді.

Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлардың кемінде біреуі нөлдік вектор болса, онда ол векторлар жүйесінің сызықтық тәуелді болатынын аңғару қиын емес. Шынында да, біреуі нақтылық үшін, мысалы, $\vec{e}_n = 0$ болса, онда (5.2) теңдік $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n \neq 0$ жағдайда орындалады. Сондықтан анықтама бойынша $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ векторлар сызықтық тәуелді болады. Бұдан сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесінде нөлдік вектордың болмайтындығы шығады.

1-теорема. Екі вектор сызықтық тәуелді болулары үшін, олардың коллинеар болулары қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. ҚАЖЕТТІЛІГІ. $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ векторларын сызықтық тәуелді деп алып, олардың коллинеар болатындығын дәлелдейік. Берілген векторлар $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$ сызықтық тәуелді болғандықтан ең болмағанда бірі нөл емес α_1, α_2 сандары табылып, $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 = 0$ теңдігі орындалуы керек. Мәселен, $\alpha_1 \neq 0$ дейік, онда соңғы теңдіктен $\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{e}_2 = \beta\vec{e}_2$ болар еді. Ал, бұл $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$ коллинеар деген сөз.

ЖЕТКІЛІКТІЛІГІ. $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$ векторлары коллинеар болсын. Олардың сызықтық тәуелді болатындығын дәлелдейік. $\vec{e}_1$ және $\vec{e}_2$ векторлары

коллинеар болғандықтан нөлден өзгеше β саны табылып $\vec{e}_2 = \beta\vec{e}_1$ теңдігі орындалуы керек (векторлардың коллинеар болу шарты). Бұдан $\beta\vec{e}_1 + (-1)\vec{e}_2 = 0$ болатындықтан, $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$ векторлары сызықтық тәуелді болады.

Салдар. Өзара коллинеар емес екі вектор сызықтық тәуелсіз болады.

Анықтама. Бір жазықтықта жататын векторларды немесе өзара параллель жазықтықтарда жататын векторларды **компланар** векторлар дейді.

2-теорема. Үш вектор сызықтық тәуелді болуы үшін, олардың компланар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелі. ҚАЖЕТТІЛІГІ. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ үш вектор сызықтық тәуелді болсын. Олардың компланар болатындығын дәлелдейік. Векторлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ сызықтық тәуелді болғандықтан, ең болмағанда бірі нөл емес $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ сандары табылып, мына $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = 0$ теңдігі орындалуы керек. Мысалы, $\alpha_3 \neq 0$ болса және $-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \beta_1, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_2$ десек, соңғы теңдіктен $\vec{e}_3 = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$ болар еді. Сонда векторларды қосудың параллелограмм ережесі бойынша $\vec{e}_3$ вектор қабырғалары $\beta_1\vec{e}_1$ және $\beta_2\vec{e}_2$ векторларды анықтайтын параллелограммның диагоналы болар еді. Сондықтан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ бір жазықтықта жатады, яғни олар компланар болады.

ЖЕТКІЛІКТІЛІГІ. Енді $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлар компланар болсын, олардың сызықтық тәуелді болатындығын дәлелдейік. Жоғарыда көрсетілген $\vec{e}_3 = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$ теңдігін алайық. Бұдан $\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + (-1)\vec{e}_3 = 0$ болады. Мұндағы коэффициент $-1 \neq 0$ болғандықтан, бұл соңғы теңдік $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторлардың сызықтық тәуелділігін көрсетеді.

Салдар. Компланар емес үш вектор сызықтық тәуелсіз болады.

3-теорема. Кеңістікте кез-келген төрт вектор сызықтық тәуелді болады.

Дәлелі. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ төрт вектор берілсін. Оларды параллель жылжыту арқылы бір нүктеден шығатындай етіп көшірейік. Сонда кез-келген үшеуі компланар болса, онда 2-теорема бойынша тұжырымның дұрыстығы шығады.

Берілген векторлардың ешқандай үшеуі бір жазықтықта жатпайды делік. Онда векторлардың бірі, мысалы, $\vec{e}_4$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторларға салынған параллелепипедтің диагоналы болатындай, сәйкесінше, α, β, γ сандары

табылады. Демек, $\vec{e}_4 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ теңдігі орындалады. Бұдан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ векторларының сызықтық тәуелділігін көреміз.

ЖАЗЫҚТЫҚТА ВЕКТОРДЫ КОЛЛИНЕАР ЕМЕС ЕКІ ВЕКТОРҒА ЖІКТЕУ. ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ БАЗИС

Теорема. Кез-келген $\vec{a}$ вектор өзімен компланар болатын, өзара коллинеар емес $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторларға әруақытта жіктеледі және де ол жіктеу біреу ғана болады.

Дәлелі. $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ - компланар векторлар және $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - коллинеар емес векторлар болсын. Бұл векторлар компланар болғандықтан, олардың бастапқы нүктелері бір нүктеден шығатындай етіп, өзіне-өзін параллель көшірсек, олар бір жазықтықта жатар еді. Сондықтан §5-тың 2-теоремасы бойынша олар сызықтық тәуелді болады. Демек, x, y нақты сандары табылып, $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ теңдігі орындалады. Сөйтіп, $\vec{a}$ векторы $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$-ге жіктеледі екен. Енді бұл жіктелудің біреу ғана болатындығын дәлелдейік. Ол үшін кері жорып, $\bar{a}$ вектор $\bar{e}_1$ мен $\bar{e}_2$-ге $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$-ден басқа түрде, былайша да $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ жіктеледі деп ұйғарайық. Онда $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ болатындықтан, бұдан $(x - x_1)\vec{e}_1 + (y - y_1)\vec{e}_2 = \vec{0}$ болар еді. Ал, теорема шарты бойынша $\vec{e}_1$ мен $\vec{e}_2$ коллинеар емес. Сондықтан олар сызықтық тәуелсіз. Олай болса, соңғы теңдік $x - x_1 = 0, y - y_1 = 0$, бұдан $x = x_1$, $y = y_1$ болғанда ғана орындалуы керек. Сөйтіп $\vec{a}$ векторы екі түрлі жіктеледі деген дұрыс емес, ол бірақ түрде жіктеледі екен.

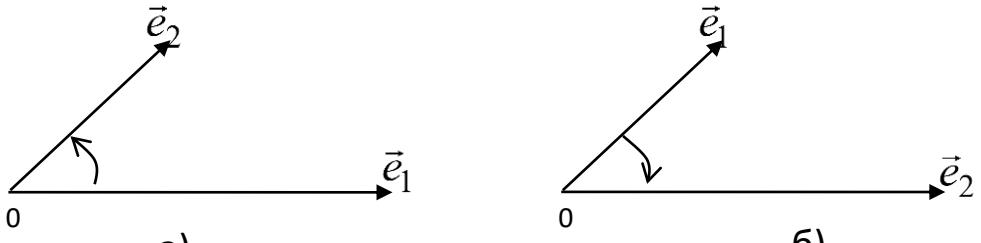
Сонымен, $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ - компланар болса, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - коллинеар болмаса, онда $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ теңдігі бір мәнді орындалады.

Анықтама. Жазықтықтың базисі деп, сол жазықтықтың өзара коллинеар емес белгілі бір ретте алынатын кез-келген екі векторын айтады.

Коллинеар емес екі векторды жазықтықтан еркін алуға болатындықтан, жазықтықтың базисі шексіз көп болады. Олардың бір-бірімен өзгешелігі базиске енетін векторларда болады. Базисті құраушы векторларды базистік векторлар дейді. Егер $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ базистік векторлар болса, онда $\vec{e}_1$-ді бірінші, $\vec{e}_2$-ні екінші базистік вектор дейді. Сонда $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ мен $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$ әртүрлі базис болады.

Егер $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис беріліп, $\vec{e}_1$-ді $\vec{e}_2$ мен беттестіруге қажетті бұру бұрышының кішісінің бағыты сағат тілі қозғалысы бағытына қарсы

болса, ол базис оң, сағат тілі қозғалысы бағытындай болса *сол базис* делінеді. 10-а суретте оң, 10-б суретте сол базистер кескінделген.



10-сурет

Біз оң базисті пайдаланамыз

Жазықтықта $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базис берілсін, онда ол жазықтықтың кез-келген $\vec{a}$ векторы, дәлелденген теорема бойынша, бұл базистік векторларға тек бір түрде жіктелуі керек: $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Анықтама.Жазықтықтағы $\vec{a}$ векторының $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базисіндегі координаталары деп, оның бұл базистік векторларға жіктелуіндегі коэффициенттері x пен y сандарын айтады.

Вектордың координаталары жақша ішіне ретімен жазылады. Анықтама бойынша $\vec{a} = (x, y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, мұндағы x-ты $\vec{a}$ векторының бірінші, y-ті екінші координаталары дейді. Мысалы: $\vec{b} = (2,3)$ болса $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, ал $\vec{c} = (1,-2)$ болса, $\vec{c} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Вектор дегеніміз не? Вектордың ұзындығы қалай анықталады?
2. Нөлдік, бірлік және тең векторлар деп қандай векторларды айтады?
3. Коллинеар және компланар векторлардың анықтамаларын беріңіз.

4. Векторларды қосу және азайту амалдары қалай орындалады?
5. Векторды санға көбейтудің анықтамасын және негізгі қасиеттерін тұжырымдаңыз.