19- дәріс. Түзудің жалпы теңдеуі. Түзудің векторлық, параметрлік және канондық теңдеулері
20-дәріс. Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі. Екі түзудің бір жазықтықта жату шарты. Түзудің жалпы теңдеуін канондық және параметрлік түрге келтіру

Дәріс жоспары:

1. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі және оның геометриялық мағынасы.
2. Түзудің векторлық, параметрлік және канондық теңдеулері, олардың арасындағы байланыс.
3. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Екі түзудің бір жазықтықта жату шарты.
4. Түзудің жалпы теңдеуін канондық және параметрлік түрге келтіру тәсілдері.

Түзудің жалпы теңдеуі

Мектеп курсынан екі жазықтықтың ортақ нүктесі болса, олардың ортақ түзуінің болатыны, яғни екі жазықтық қиылысса, қимада түзу шығатыны белгілі.

Тік бұрышты координаталар жүйесіндегі теңдеулері:

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (1.1)

болатын екі жазықтық берілсін. Бұлардың қиылысу сызығында жатқан кез-келген нүктенің координаталары бұл теңдеулердің екеуін де қанағаттандырады керісінше бұл теңдеудің екеуін де қанағаттандыратын кез-келген (x,y,z) үш саны, ол жазықтықтардың қиылысу сызығында жататын нүктенің координаталары болады. Сондықтан бұл теңдеулердің жүйесін

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

түзудің кеңістіктегі теңдеуі ретінде қарастыруға болады.

Бірақ кез-келген үш айнымалы екі сызықтық теңдеу (1.1) түзуді анықтай бермейді. Ол теңдеулер жеке-жеке жазықтықты анықтайды, ал екі жазықтық түзуді анықтау үшін олар қиылысу керек. Қиылысу үшін ол жазықтардың нормаль векторлары $\vec{N}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$ мен $\vec{N}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$ коллинеар болмауы керек. Сөйтіп, (1.2) түзудің теңдеуі болуы үшін айнымалының коэффициенттері пропорционал болмау керек. Мұндай кезде (1.2) екі жазықтық арқылы анықталатын түзу теңдеуі немесе түзудің жалпы теңдеуі деп

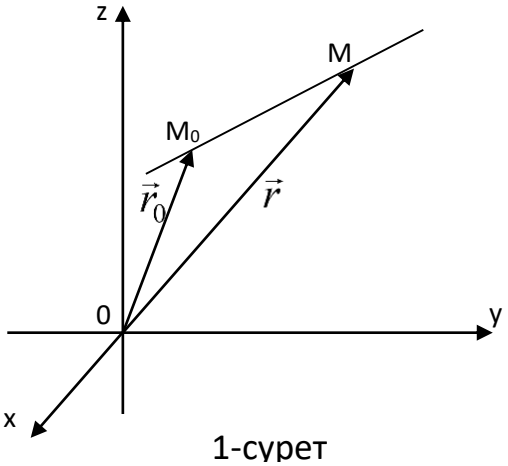
аталады. Жазықтықтың нормаль векторлары жазықтыққа перпендикуляр болатындықтан, ол нормаль векторлардың векторлық көбейтіндісі $\left[\vec{N}_1\ \vec{N}_2\right]\perp\vec{N}_1$ және $\left[\vec{N}_1\ \vec{N}_2\right]\perp\vec{N}_2$ болатындықтан $\left[\vec{N}_1\ \vec{N}_2\right]$ вектор берілген жазықтықтардың қиылысу түзуіне параллель болады. Оны түзудің бағыттаушы векторы дейді. Сөйтіп, (I тарау, §14)

$$\left[\vec{N}_1\ \vec{N}_2\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right)$$

вектор (1.2) түзуінің бағыттаушы векторы болады.

Түзудің векторлық, параметрлік және канондық теңдеулері

Түзудің кеңістіктегі орны оның бір нүктесі $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ мен оған параллель болатын $\vec{S}=\left(m, n, l\right)$ векторымен толық анықталады.Түзу бойынан ағымдық $M\left(x, y, z\right)$ нүктесін алайық (1-сурет). Сонда M нүктесі түзудің қай жерінен алынса да $\overrightarrow{M_0M}$ мен $\vec{S}$ векторлары коллинеар болады. Сондықтан *t* нақты саны табылып



1-сурет

$$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{S} \qquad (2.1)$$

теңдігі орындалады. Мұндағы $t>0$ болады, егер $\overrightarrow{M_0M}$ мен $\vec{S}$ бағыттас болса және теріс болады егер олар қарама-қарсы бағытта болса $\vec{S}\left(m, n, l\right)$ түзудің бағыттаушы векторы болады, ал оның координаталары m, n, l - ді түзудің бағыттаушы коэффициенттері дейді.

M_0 нүктенің радиус векторы $\overrightarrow{OM}_0 = \vec{r}_0$, M нүктенің радиус-векторы $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ дейік. Сонда ΔOM_0M -нан $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \overrightarrow{M}_0\overrightarrow{M}$ немесе

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S} \qquad (2.2)$$

болар еді. Бұл (2.2) кеңістіктегі түзудің **векторлық теңдеуі** деп аталады. Ол теңдеуді координаталар арқылы былайша жазуға болады:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + lt. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Бұл түзудің **параметрлік теңдеуі** делінеді. Ол теңдеудегі параметр t-ны тауып, теңестірсек

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l} \qquad (2.4)$$

теңдеуі шығады. Оны түзудің **канондық теңдеуі** дейді. (2.4) теңдеудің бірінші немесе кез келген екеуінің бөлімі нөлге тең болса, онда оның алымы нөлге тең болады. Мысалы $l = 0$ болса, яғни

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{0}$$

болса, онда бұл түзу теңдеуі

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad z - z_0 = 0 \qquad (2.5)$$

түрінде жазылады және ол Ox өсіне параллель түзудің теңдеуі болады. Мысалы $A(5, 3, -2)$ нүктеден $\overrightarrow{S}(1, -2, 4)$ векторға параллель етіп жүргізілген түзудің канондық теңдеуі $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{4}$ болады, мұны t-ға теңеп түзудің параметрлік теңдеуін $x = 5 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = -2 + 4t$ шығарып алуға болады. Ал, $A(5, 3, -2)$ нүктеден Oz өсіне параллель етіп жүргізілген түзу теңдеуі $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ болады.

Екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

Тік бұрышты координаталар жүйесінде $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ және $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ екі нүкте берілсін. Екі нүктені бастыра жалғыз-ақ түзу жүргізуге болады. Сол түзудің теңдеуін құрайық. Түзудің ағымдық нүктесі $M(x, y, z)$ десек, онда $\overrightarrow{M_1 M_2}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)$ және $\overrightarrow{M_1 M}=\left(x-x_1, y-y_1, z-z_1\right)$ векторлары коллинеар болатындықтан $\overrightarrow{M_1 M}=\lambda \overrightarrow{M_1 M_2}$ болар еді. Бұдан координаталарға көшсек $x-x_1=\lambda($ $x_2-x_1), \quad y-y_1=\lambda \quad\left(y_2-y_1\right), \quad z-z_1=\lambda\left(z_2-z_1\right)$ болады. Бұдан екі нүктеден өтетін түзу теңдеуін аламыз:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.1)$$

Мысал. M_1(-2, 1, 5), M_2(4, 3, -1) нүктелерінен өтетін түзу теңдеуі (3.1) бойынша $\frac{x+2}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{-6}$ болады.

Екі түзудің бір жазықтықта жату шарты

Екі түзу канондық теңдеулермен берілсін:

$$\frac{x-x_1}{x_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{l_1} \quad \text{және} \quad \frac{x-x_2}{x_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{l_2}.$$

Бұл екі түзу бір жазықтықта жатса, онда $\vec{S}_1=\left(m_1, n_1, l_1\right), \vec{S}_2=\left(m_2, n_2, l_2\right)$ және $\overrightarrow{M_1 M_2}=\left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right)$ векторлары компланар болар еді. Сондықтан үш вектордың компланар болу шарты бойынша, олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең болуы керек:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.1)$$

(4.1) теңдік екі түзудің бір жазықтықта жату шартын көрсетеді.

Түзудің жалпы теңдеуін канондық және параметрлік түрге келтіру

Жалпы теңдеумен түзу берілсін

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Оны канондық немесе параметрлік түрге келтіру үшін, ол түзу бойында жататын бір нүктенің координаталары (x_0, y_0, z_0) мен түзудің бағыттаушы векторының координаталары (m, n, l) - ді табу керек.

Түзу бойында жататын нүкте координатасын табу үшін, егер

(5.1)-де $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ болса, онда z-ке еркін z_0 мән беріп, теңдеулер жүйесін $x = x_0, \quad y = y_0$ табамыз, егер $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ болса, онда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ не $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ болуы керек. Сөйтіп, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ болса, онда не x-ке не y-ке еркін мән береміз қалғандарын теңдеу жүйесінен табамыз.

Сөйтіп $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктені табуға болады. Ал, түзудің бағыттаушы векторы жоғарыда айтылғандай. $\left[\vec{N}_1 \vec{N}_2\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ болады.

Сондықтан (5.1) түзудің канондық теңдеуі

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (5.2)$$

түрде жазылады. Мұны t-ға теңеп, параметрлік теңдеуін шығарып аламыз:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t, \quad y = y_0 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t, \quad z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t. \quad (5.3)$$

Мысал. Түзудің жалпы теңдеуін $\begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0, \\ 2x + y - 4z + 1 = 0 \end{cases}$

нормаль түрге келтіру керек.

Шешуі. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ болғандықтан z-ке еркін мән береміз, $z = 0$ дейік. Сонда $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ жүйе шығады. Бұдан $x = -2, \quad y = 3$. Сонымен $M_0(-2, 5, 0)$ нүкте түзуде жатады. Ал түзудің нормаль векторының координаталары: $m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -11$, $n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 10$, $l = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ болады. Сонымен $\vec{S} = (-11, 10, -3)$. Сонда түзудің канондық теңдеуі: $\frac{x+2}{-11} = \frac{y-3}{10} = \frac{z-0}{-3}$ болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі қалай беріледі және оның геометриялық мағынасы қандай?
2. Түзудің векторлық, параметрлік және канондық теңдеулері қалай жазылады?
3. Кеңістіктегі берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі қалай құрылады?

4. Кеңістіктегі екі түзудің бір жазықтықта жату шарты қандай және ол қалай анықталады?
5. Түзудің жалпы теңдеуін канондық және параметрлік түрге қалай келтіруге болады?