17 дәріс. Жазықтықтардың арасындағы бұрыш. Параллельдік және перпендикулярлық шарттар.
18 дәріс. Жазықтықтың нормаль теңдеуі. Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

Дәріс жоспары:

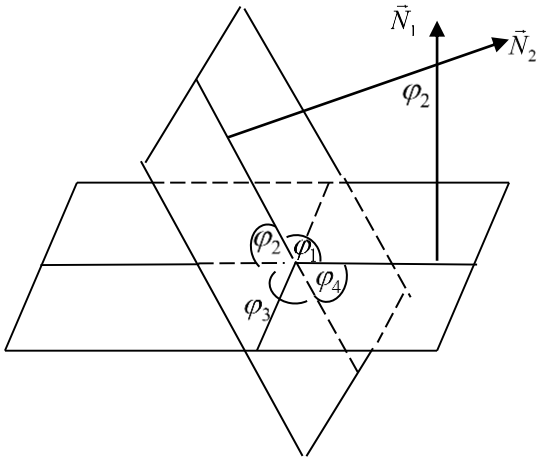
1. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш және оны анықтау формуласы.
2. Жазықтықтардың параллель және перпендикуляр болу шарттары.
3. Жазықтықтың нормаль теңдеуі және оның геометриялық мағынасы. Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру.
4. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық және оны есептеу формуласы.

Жазықтықтардың арасындағы бұрыш. Параллельдік және перпендикулярлық шарттар

Тік бұрышты координаталар жүйесінде жалпы теңдеулермен екі жазықтық берілсін:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Егер, ол жазықтықтар қиылысса, онда төрт екіжақты бұрыш пайда болады. Олардың шамаларын $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4$ дейік (3-сурет).



3-сурет

Онда $\varphi_1=\varphi_3,\ \varphi_2=\varphi_4,\ \varphi_1+\varphi_2=180^0$ болады. Сондықтан бұл төрт бұрыштың бірін тапса жеткілікті. Сол төртбұрыштың бірі әр уақытта бұл жазықтықтардың нормаль векторлары $\vec{N}_1=\left(A_1,B_1,C_1\right)$ мен $\vec{N}_2=\left(A_2,B_2,C_2\right)$ арасындағы бұрышқа тең болады. 3-суретте ол бұрыш φ_2-ге тең:

$\left(\overset{\wedge}{N_1,N_2}\right)=\varphi_2=\varphi_4$, ал қалған екеуі оны 180^0С-қа толықтырушы бұрыш болады, яғни $\varphi_1=\varphi_3=180^0-\left(\overset{\wedge}{N_1,N_2}\right)$. Сондықтан екі

жазықтық арасындағы бұрышты жалпы түрде φ-десек, онда $\cos\varphi = \pm\cos\left(\overset{\wedge}{N_1, N_2}\right)$ болады.Сонымен жазықтықтар арасындағы бұрыш мына формуламен анықталады.

$$\cos\varphi = \pm\cos\left(\overset{\wedge}{N_1, N_2}\right) = \pm\frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\left|\vec{N}_2\right|}.$$

Ал, векторлардың координаталары арқылы жазсақ

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5.1)$$

Егер нормаль векторлар арасындағы бұрыш сүйір (доғал) болса, онда (5.1) формула жазықтықтар арасындағы доғал (сүйір) бұрышты анықтайды.

1-мысал. $x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0$ және $x + \sqrt{2}y - z + 13 = 0$ жазық-тықтарының арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. Бұл мысалда $\overrightarrow{N}_1 = (1, -\sqrt{2}, 1),\ \overrightarrow{N}_2 = (1, \sqrt{2}, -1).$

Сонда $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1}\cdot\sqrt{1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}} = -\dfrac{1}{2}$

бұдан $\varphi = 120^0$ және 60^0

Егер екі жазықтық перпендикуляр болса, онда (5.1)-дегі $\varphi = 90^0,\ \cos 90^0 = 0$ болатындықтан

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (5.2)$$

болып шығады. Бұл екі жазықтықтың перпендикуляр болу шарты.

Егер екі жазықтық параллель болса, онда олардың нормаль векторлары коллинеар болады да $\overrightarrow{N}_1 = \lambda\overrightarrow{N}_2$ болады. Бұдан координатаға көшсек $A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2$ болады да, бұлардан

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (5.3)$$

болып шығады. Бұл екі жазықтықтың параллель болу шарты.

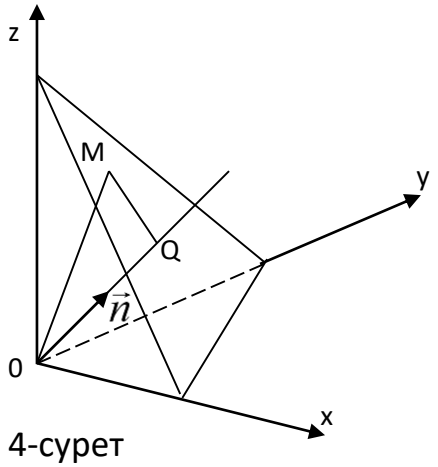
2-мысал. $2x+5y+7z-1=0$ мен $3x-4y+2z=0$;

$y-3z+1=0$ мен $2y-6z+5=0$ және $4x+2y-4z+1=0$ мен $2x+y+2z+3=0$ жазықтықтар жұптары арасында өзге параллель, перпендикуляр болатындары бар ма?

Шешуі. I-жұп жазықтықтары үшін $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=$ $=2\cdot3+5\cdot(-4)+7\cdot2=0$ шарты орындалады, сондықтан ол жазықтықтар өзара перпендикуляр. 2-жұп жазықтықтар үшін $\frac{1}{2}=\frac{-3}{-6}\neq\frac{1}{5}$, яғни $\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Сондықтан бұл жазықтықтар жұбы өзара параллель. 3-жұп жазықтықтар үшін $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ себебі $\frac{2}{1}\neq-\frac{4}{2}$. Сондықтан олар параллель емес, ал $4\cdot2+2\cdot1-4\cdot2\neq0$ сондықтан олар перпендикуляр да емес.

Жазықтықтың нормаль теңдеуі

Тік бұрышты $Oxyz$ координаталар жүйесінде *П* жазықтығы берілсін. Ол жазықтықтың координата басынан қашықтығы *P*-ға тең болсын және жазықтықтың нормаль векторы координата өстерімен α,β,γ бұрыштар жасайтын болсын. Осы *P,* α,β,γ -лар арқылы жазықтықтың теңдеуін құрайық.



4-сурет

Жазықтыққа 0 нүктеден перпен-дикуляр түзу жүргізейік ол жазықтықпен Q нүктеде қиылыссын. Оның бойына 0 нүктеден бастап бірлік вектор $\vec{n}^o$ өлшеп салайық. Сонда $\vec{n}^o$ координата өстерімен α,β,γ бұрыштар жасар еді. Сондықтан оның координаталары

$\vec{n}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ болады, ал $OQ = P$. Жазықтықтан $M(x, y, z)$ нүктені қай жерінен алсақ та (4-сурет), $\overrightarrow{OM}$ вектордың нормаль түзудегі проекциясы

$$np_{\vec{n}^o}\overrightarrow{OM} = P \qquad (6.1)$$

болады. Ал, $\vec{n}^o$ бірлік вектор болғандықтан, скаляр көбейтіндіні екінші анықтамасы (I-тарау §13) бойынша,

$$np_{\vec{n}^o}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}^o$$

болады. Соңғы теңдікті координаталар арқылы жазып (6.1) мен

теңестірсек $P = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ болар еді, өйткені $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, ал $\vec{n}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Бұдан

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0 \qquad (6.2)$$

Бұл теңдеу (6.1) бойынша тек жазықтықта жататын нүктелердің координаталары қанағаттандырады. Сондықтан ол жазықтықтың теңдеуі болады, оны жазықтықтың нормаль теңдеуі деп атайды.

Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру

Жазықтық жалпы теңдеумен берілсін $Ax + By + Cz + D = 0$. Оны нормаль түрге келтіру үшін, бұл теңдіктің екі жағын да нөлге тең емес μ санына көбейтейік

$$A\mu x + B\mu y + C\mu z + \mu D = 0. \qquad (7.1)$$

Бұл жазықтықтың нормаль теңдеуі

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - P = 0 \qquad (7.2)$$

болсын. Сонда (7.1) мен (7.2) теңдеулер бір ғана жазықтықтың теңдеулері болғандықтан:

$$\mu A = \cos\alpha,\ \mu B = \cos\beta,\ \mu C = \cos\gamma,\ \mu D = -P \qquad (7.3)$$

болуы керек. Бұл теңдіктерді квадраттап, қоссақ

$$\mu^2 A^2 + \mu^2 B^2 + \mu^2 C^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

болар еді. (I-тарау §13). Бұдан

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (7.4)$$

Бұл μ санын нормальдаушы көбейткіш дейді. Осы формуламен табылатын μ санына жазықтықтың жалпы теңдеуін көбейтсек

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (7.5)$$

теңдеуі шығады және ол жазықтықтың нормаль түрге келтірілген теңдеуі болады. (7.3) пен (7.4)-тен жазықтықтың нормалінің бағыттаушы косинустары анықталады.

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad P = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1-мысал. Жазықтықтың $2x + 3y + \sqrt{12}z - 6 = 0$ жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру керек.

Шешуі. Алдымен нормальдаушы көбейткішті табамыз $\mu = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+9+12}} = \frac{1}{5}$. Жазықтықтың жалпы теңдеуін $\mu = 1/5$ санына мүшелеп көбейтеміз. Сонда ол нормаль түрге келеді: Мұндағы

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},$$

немесе

$$\Delta = A_1B_2 - A_2B_1, \quad \Delta_1 = B_1C_2 - C_1B_2, \quad \Delta_2 = C_1A_2 - A_1C_2.$$

Зерттеу. (10.1) формула бойынша x пен $y, \Delta, \Delta_1, \Delta_2$-нің мәндеріне байланысты табылады. Ол анықтауыштар арасында мынадай мүмкін жағдайлар болады.

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{\sqrt{12}}{5}z - \frac{6}{5} = 0.$$

Мұндағы $\cos\alpha = \frac{2}{5}; \quad \cos\beta = \frac{3}{5}; \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{12}}{5}; \quad P = \frac{6}{5}.$

2-мысал. Координаталардың бас нүктесінен жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығы 6-ға тең. Осы перпендикуляр мен абсцисса арасындағы бұрыш 60^0, ордината арасындағы бұрыш 45^0 екені белгілі. Жазықтықтың теңдеуін құру керек.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $P = 6$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$. Сондықтан есепті шығару үшін γ бұрышын табу керек. Нормальдың бағыттаушы косинустарының квадраттарының қосындысы 1-ге тең болатындықтан $\cos^2 60^0 + \cos^2 45^0 + \cos^2\gamma = 1$ болады. Ал, $\cos 60^0 = 1/2, \quad \cos 45^0 = \sqrt{2}/2$ болатындықтан

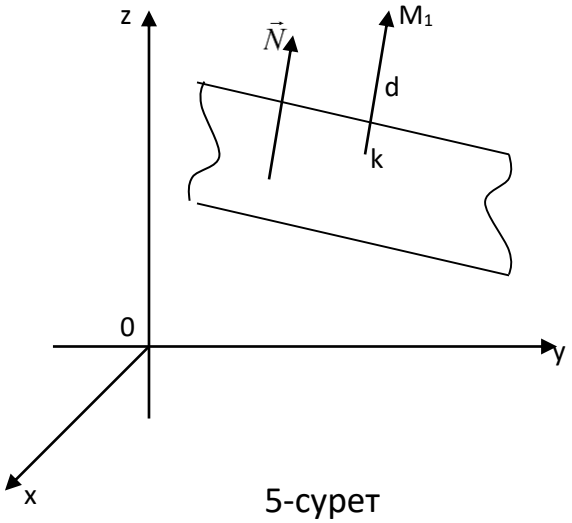
$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Бұларды (6.2)-ге қойсақ, жазықтықтың нормаль теңдеуін аламыз:

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z - 6 = 0, \text{ бұдан } x + \sqrt{2}y + z - 12 = 0.$$

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

Тік бұрышты координаталар жүйесінде жалпы теңдеулермен $Ax+By+Cz+D=0$ жазықтық және ол жазықтықта жатпайтын $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүкте берілсін. M_1 нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық d - ны табу керек (5-сурет). M_1-ден жазықтыққа M_1K перпендикулярын түсірейік.



5-сурет

Сонда

$$\left|\overrightarrow{KM_1}\right| = d$$

болады. Жазықтықтың нормаль векторы $\overrightarrow{N}=(A,B,C)$ мен $\overrightarrow{KM_1}$ коллинеар болатындықтан олардың скаляр көбейтіндісі

$$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{KM_1} = \pm\left|\overrightarrow{N}\right| d$$

болар еді. Жазықтықта жатқан *K* нүктенің координаталары (x_0, y_0, z_0) десек,

онда $\overrightarrow{KM_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ ал $\vec{N}=(A,B,C)$ болатындықтан соңғы теңдікті былайша координаталар арқылы жазуға болар еді:

$$A\left(x_1 - x_0\right) + B\left(y_1 - y_0\right) + C\left(z_1 - z_0\right) = \pm\left|\overrightarrow{N}\right| d$$

Ал, $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$ $\left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ екенін ескерсек,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot d\,.$$

Бұдан

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \qquad (8.1)$$

болып шығады.

1-мысал. $M(5,2,4)$ нүктенің $x + 2y - 2z + 11 = 0$ жазықтықтан қашықтығын табу керек.

Шешуі. (8.1) формула бойынша $d = \left|\frac{5\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot(-2) + 11}{\sqrt{1+4+4}}\right| = \frac{12}{3} = 4.$

2-мысал. $x - 2y + 2z - 3 = 0$ мен $2x - 4y + 4z - 30 = 0$ параллель жазықтықтарының ара қашықтығын табу керек.

Шешуі. Параллель екі жазықтықтың ара қашықтығын табу үшін олардың біреуінен қандай да бір нүкте алып, осы нүктеден екінші жазықтыққа дейінгі қашықтықты табу керек. (15, 0, 0) нүктесі екінші жазықтықта жататыны айқын. Іздеген d қашықтық (8.1) формуласы бойынша табамыз:

$$d = \frac{|1\cdot 15 - 2\cdot 0 + 2\cdot 0 - 3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|15-3|}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Бақылау сұрақтары:

1. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш қалай анықталады және қандай формуламен есептеледі?
2. Екі жазықтықтың параллель және перпендикуляр болу шарттары қандай?
3. Жазықтықтың нормаль теңдеуі қалай жазылады және оның геометриялық мағынасы қандай?

4. Жазықтықтың жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру қалай жүзеге асырылады?
5. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық қалай анықталады және қандай формуламен есептеледі?