15-дәріс. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық. Екі түзудің қиылысуы. Үш түзудің қиылысуы
16-дәріс. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр етіп жүргізілген жазықтықтың теңдеуі. Жазықтықтың жалпы теңдеуі. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі. Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

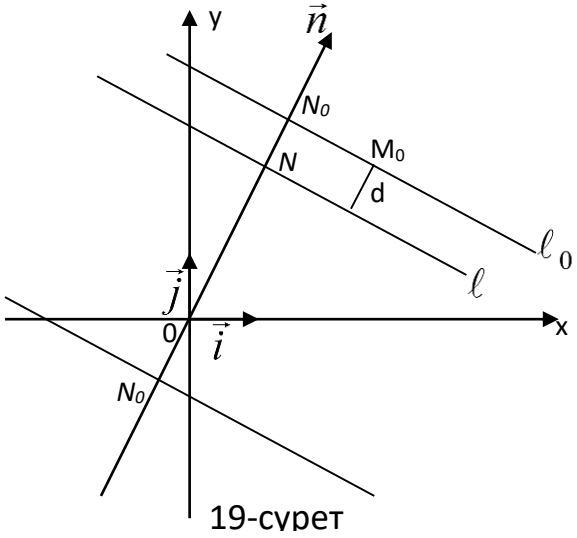
Дәріс жоспары:

1. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық және оны есептеу формуласы.
2. Екі және үш түзудің қиылысу шарттары, олардың қиылысу нүктелерін анықтау.
3. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр жүргізілген жазықтықтың теңдеуі. Жазықтықтың жалпы теңдеуі.
4. Жазықтықтың кесінділік теңдеуі және берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық

Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық деп нүктеден түзуге түсірілген перпендикулярдың ұзындығын айтады.

Тік бұрышты координаталар жүйесінде нормаль теңдеумен $x\cos\varphi + y\sin\varphi - P = 0$, l түзуі және ол түзуде жатпайтын $M_0(x_0, y_0$) нүктесі берілсін (19-сурет). Бұл нүктенің l түзуден



19-сурет

қашықтығы d-ны табу керек. l түзудің берілген теңдеуі бойынша ол түзудің координата басынан қашықтығы $ON = P$-ға тең және ON -нің x өсімен жасайтын бұрышы φ-ге тең.

M_0-ден l-ге параллель етіп l_0 түзуін жүргізсек және оның координата басынан қашықтығы $ON_0 = P_0$ десек, онда l_0 түзудің нормаль теңдеуі (8.4) бойынша $x\cos\varphi + y\sin\varphi - P_0 = 0$ болар еді. Ал, M_0 нүкте бұл түзуде жататындықтан $x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - P = 0$, бұдан $P = x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi$. Сондықтан егер N мен N_0 нүктелер

О нүктенің бір жағында жатса, онда M_0 нүктеден l түзуіне дейінгі қашықтық d мынаған тең болар еді.

$$d = \left|P_0 - P\right| = \left|x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - P\right|.$$

Егер N нүкте мен N_0 нүкте О нүктенің екі жағында жатса, онда l_{O} түзудің теңдеуі $x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - P_0 = 0$ болар еді. M_0 нүкте бұл түзуде жататындықтан $x_0\cos\varphi_1 + y_0\sin\varphi_1 - P_0 = 0$ болады. Мұндағы φ_1 мен φ бір-бірінен π бұрышқа өзгешеленеді, яғни $\varphi + 180^{\text{O}} = \varphi_1$ болады . Сондықтан

$$P_0 = x_0\cos\varphi_1 + y_0\sin\varphi_1 = x_0\cos\left(\varphi + 180^0\right) + y_0\sin\left(180^0 + \varphi\right) =$$
$$= -x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi$$

болады да, бұл кездегі M_0 нүктенің l түзуден қашықтығы

$$d = \left|P_0 - P\right| = \left|-x_0\cos\varphi - y_0\sin\varphi + P\right| = \left|x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - P\right|$$

болып шығады. Сөйтіп екі жағдайда да M_0 нүктенің l түзуден қашықтығы мына формуламен

$$d = \left|x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - P\right|$$

анықталады екен.

Сөйтіп, теңдеуі нормаль түрде берілген түзу мен нүктенің ара қашықтығын табу үшін, түзудің теңдеуіндегі айнымалылар орнына нүкте координаталарын қоя салу керек. Мысалы, $\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 1 = 0$ теңдеу нормаль түрде берілген, себебі $(5/13)^2 + (12/13)^2 = 1$. Сондықтан ол теңдеумен анықталатын түзудің $M(2,-3)$ нүктеден қашықтығын табу үшін ол теңдеудегі x пен y-нің орнына 2 мен 3-ті қоя салу керек. Сонда

$$d = \left|\frac{5}{13}\cdot 2 + \frac{12}{13}\cdot(-3) - 1\right| = \left|\frac{10 - 36 - 13}{13}\right| = \left|\frac{-39}{13}\right| = 3$$

іздеген аралық болады.

1-мысал. $3x-4y+10=0$ теңдеумен берілген түзумен $M_0(4,3)$ нүктенің арақашықтығын табу керек.

Шешуі. Мұнда $3^2+(-4)^2=25\neq 1$. Сондықтан нүкте координаталарын x, y орнына тікелей қоя салуға болмайды. Бұл кезде алдымен түзу теңдеуін нормаль түрге келтіру керек. Ол үшін ол теңдеуді, нормальдаушы көбейткішке

$$\mu=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-4)^2}}=-\frac{1}{5}$$

көбейту керек.Сонда $-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$ түрге келеді. Енді x, y орнына нүкте координаталары 4 пен 3-ті қоямыз. Сонда

$$d=\left|-\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{4}{5}\cdot 3-2\right|=\left|\frac{-12+12-10}{5}\right|=|-2|=2$$

болып шығады.

2-мысал. $24x-10y+39=0$ және $y=2{,}4x-5{,}2$ параллель түзулердің арақашықтығын табу керек.

Шешуі. Параллель түзулердің арақашықтығын табу үшін, ол түзулердің біреуінің бойында жатқан бір нүктені алады да, ол нүктеден екінші түзуге дейінгі қашықтықты таба салады. $M(0,3,9)$

нүкте бірінші түзу бойында жатады, себебі $24\cdot 0-10\cdot 3{,}9+39=0$ болады. Екінші түзудің нормальдаушы көбейткіші

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{(2{,}4)^2+(-1)^2}}=\frac{5}{13}.$$

Сондықтан оның нормаль теңдеуі $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-2=0$ болады. Демек, екі параллель түзулердің ара қашықтығы

$$d=\left|\frac{12}{13}\cdot 0-\frac{5}{13}\cdot 3{,}9-2\right|=\left|-\frac{3}{2}-2\right|=3{,}5.$$

Екі түзудің қиылысуы

Тік бұрышты координаталар жүйесінде жалпы теңдеумен екі түзу берілсін:

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{және} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

Егер бұл екі түзу қиылысса, онда қиылысу нүктесі екі түзуде де жатады. Сондықтан ол нүктенің координаталары екі түзудің де теңдеулерін қанағатандырады. Сондықтан бұл екі теңдеуді бір жүйеге алып шешсек, ол теңдеулермен анықталатан түзулердің қиылысу нүктесінің координаталарын табамыз:

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}. \qquad (10.1)$$

Мұндағы

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix},$$

немесе

$$\Delta=A_1B_2-A_2B_1, \quad \Delta_1=B_1C_2-C_1B_2, \quad \Delta_2=C_1A_2-A_1C_2.$$

Зерттеу. (10.1) формула бойынша x пен $y, \Delta, \Delta_1, \Delta_2$-нің мәндеріне байланысты табылады. Ол анықтауыштар арасында мынадай мүмкін жағдайлар болады.

1) $\Delta \neq 0$. Онда (10.1) формуладан тек бір пар x, y табылады. Сондықтан берілген түзулер бір нүктеде қиылысады және ол нүкте жалғыз болады.

2) $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$. Бұл кезде берілген теңдеулердің барлық сәйкес коэффициенттері пропорционал болады, яғни

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=m$$

болады. Бұдан $A_1x+B_1y+C_1=m(A_2x+B_2y+C_2)=0$ болады.

Сөйтіп, берілген теңдеулер бір-бірінен бір тұрақты сан көбейткішке өзгешеленеді. Ондай теңдеулер өзара эквивалентті теңдеулер

делінеді, яғни бұл теңдеулердің біреуін қанағаттандырған x, y мәні екіншісінде қанағаттандырады. Сондықтан ол екі теңдеу бір түзуді анықтайды, яғни екі түзу беттеседі.

3)Егер $\Delta = 0$, ал қалған анықтауыштар нөлге тең емес болса, онда x пен y -тың анықталған мәні болмайды. Себебі $0 \cdot x = \Delta_1, \quad 0 \cdot y = \Delta_2$ (мұндағы $\Delta_1 \neq 0, \quad \Delta_2 = 0$ сандар) теңдікті қанағаттандыратын x, y сандары болмайды. Сондықтан екі түзу қиылыспайды, яғни параллель болады. Кеңейтілген жазықтықта берілген түзулер шексіз алыстатылған нүктеде қиылысады деп те айтады.

Сөйтіп түзулер параллель болу үшін $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ ал $B_1C_2 - B_2C_1 = A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0$ болуы керек, ал бұл

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

деген сөз.

4) Егер $B_1 = B_2 = 0, \quad \Delta_2 = A_2C_1 - A_1C_2. \neq 0$ болса, онда $\Delta_1 = B_1C_2 - B_2C_1$ болады. Берілген түзулер теңдеуі $A_1x + C_1 = 0,$ $A_2x + C_2 = 0$ түрге келеді де, екеуі де Oy өсіне параллель болады.

5) Егер $A_1 = A_2 = 0, \; B_1C_2 - C_1B_2 = \Delta_1 \neq 0,$ онда $A_1B_2 - B_1A_2 = \Delta_2 = 0,$ $B_1y + C_1 = O, B_2y + C_2 = O$ болып екі түзу де Ox өсіне параллель болады.

6) Егер екі түзу беттессе, онда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ болады. Бұл $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ болады.

1-мысал. $x + y + 1 = 0, \quad x - y - 1 = 0$ түзулердің қиылысу нүктесі мен $M(2, 9)$ нүктеден өтетін түзудің теңдеуін табайық.

Шешуі. Берілген түзулердің қиылысу нүктесін табамыз. Ол үшін $\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешеміз. Мұны шешсе $x = 0, \quad y = -1$ болады. $M(0, -1)$. Енді $M_1(0, -1)$ және $M_2(2, 3)$ нүктеден өтетін түзу теңдеуі $\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y + 1}{3 + 1}$ бұдан $\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{4}$ немесе $2x - y - 1 = 0$.

2-мысал. $x-y-1=0,\ \ x+2y-2=0$ екі түзудің қиылысу нүктесінен $y=2x+4$ түзуіне перпендикуляр етіп жүргізілген түзудің теңдеуін құрайық.

Шешуі. Түзулердің қиылысу нүктесін жүйеден табамыз:

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ x+2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1, \\ x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4/3, \\ y=1/3 \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Екі түзудің перпендикуляр болу шарты бойынша ізделіп жатқан түзудің бұрыштық коэффициенті $k=-1/2$ болуы керек. Сонда іздеген түзу теңдеуі $y-1/3-1/2\cdot(x-4/3)$ болады. Бұдан $6y-2=-3x+4\Rightarrow 3x+6y-6=0\Rightarrow x+2y-2=0$ іздеген теңдеу болады.

Үш түзудің қиылысуы

Үш түзу мынадай теңдеулермен берілсін:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Осы үш түзудің ортақ нүктесін іздейік. Егер ондай нүкте бар болса, оның координаталары үш теңдеуді де қанағаттандыруы керек. Сондықтан оларды табу үшін үш теңдеуді бір жүйеге алып шешу керек:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3=0. \end{cases} \qquad (11.1)$$

Алғашқы екі теңдеуден

$$x=\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Мұны үшінші теңдеудегі орнына қойсақ:

$$A_3\cdot\frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}+B_3\cdot\frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}+C_3=0$$

Немесе $A_3 \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_3 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$

Сонымен

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11.2)$$

Бұл теңдік (11.1) теңдеулермен берілген үш түзудің бір нүктеде қиылысатын шартын көрсетеді.

Сонымен, үш түзу (11.1) теңдеулермен берілгенде, олардың бір нүктеде қиылысатынын анықтау үшін (11.2) шарттың орындалатынын не орындалмайтынын қарастыру қажет. Бұл шарт орындалса түзулер бір нүктеде қиылысады, ол орындалмаса бір нүктеде қиылыспайды.

Мысал. Мына үш түзу: $x + 3y - 1 = 0, \quad 5x + y - 10 = 0, \quad 3x - 5y - 8 = 0$ бір нүктеден өте ме?

Шешуі. Әуелі бастапқы екі түзудің теңдеуін біріктіріп шешейік:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{29}{14}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{14} = -\frac{5}{14}.$$

Сонымен, $M(29/14, -5/14)$ шығады. Енді осы M нүктенің координаталары үшінші $3x - 5y - 8 = 0$ теңдеуін қанағаттандырса, онда үш түзу бір нүктеден өтеді. Соны анықтайық:

$$3 \cdot \frac{29}{14} + 5 \cdot \frac{5}{14} - 8 = \frac{87}{14} + \frac{25}{14} - 8 = \frac{112 - 112}{14} = \frac{0}{14} = 0.$$

Демек, үш түзу бір нүктеден өтеді. Бұл есепті (11.2) формула бойынша тексеруге де болатын еді

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \\ 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 25 - 90 + 3 - 50 + 12 = 0.$$

Бақылау сұрақтары:

1. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық қалай анықталады және қандай формуламен есептеледі?
2. Екі және үш түзудің қиылысу шарттары қандай? Олардың қиылысу нүктелері қалай табылады?
3. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр жүргізілген жазықтықтың теңдеуі қалай құрылады?
4. Жазықтықтың жалпы және кесінділік теңдеулері қандай түрде жазылады және олардың арасындағы байланыс қандай?
5. Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі қалай құрылады?