13-дәріс. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу теңдеуі.
14-дәріс. Түзудің жалпы теңдеуі. Түзулердің арасындағы бұрыш. Екі түзудің параллель және перпендикуляр болу шарт. Түзудің нормаль теңдеуі

Дәріс жоспары:

1. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі және оны құру тәсілдері.
2. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр жүргізілген түзудің теңдеуі.
3. Түзудің жалпы және нормаль теңдеулері, олардың арасындағы байланыс.
4. Екі түзудің арасындағы бұрыш. Түзулердің параллель және перпендикуляр болу шарттары.

Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі

Тікбұрышты координаталар жүйесінде $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нүктелері берілсін. Осы екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуін құру үшін $\overline{S} = \overline{M}_1\overline{M}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ векторын осы түзудің бағыттаушы векторы ретінде аламыз. Сонда $M_1(x_1, y_1)$ нүктеден $\overline{S} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ векторына параллель болып өтетін түзу теңдеуі (3.3) формула бойынша

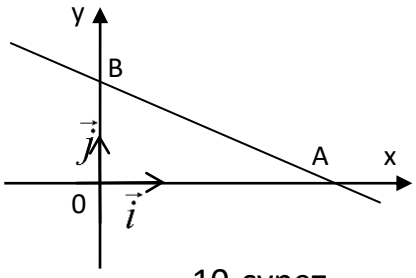
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (4.1)$$

болар еді. Осы теңдеу екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі делінеді. Егер (4.1) теңдеуде бөлімдерінің бірі нөлге айналса, онда ол бөлшектің алымын нөлге теңеу керек. Мысалы, $x_2 - x_1 = 0$ болса, іздеген теңдеуіміз $x - x_1 = 0$ болады. Бұл кезде M_1 мен M_2 нүктелер Оу өсінен бірдей қашықтықта жатады да, M_1M_2 түзуі ол өске параллель болады.

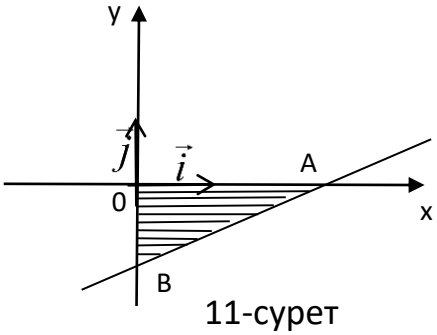
Түзу *Ox* өсін $A(a, o)$, Оу өсін $B(o, b)$ нүктелерде қиып өтсін $a \neq 0, b \neq 0$ (10-сурет) болсын. Сонда AB түзуінің теңдеуі (4.1) теңдеу бойынша $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$

болар еді. Бұдан мынадай $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (4.2)

теңдеу шығады. Оны түзудің **кесінділік теңдеуі** дейді, өйткені, a мен b сандары түзудің координаталар өстерінен қандай кесінділер қиятынын көрсетеді.



10-сурет



11-сурет

1-мысал. $M_1(3,-2)$ мен $M_2(5,1)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін құру керек.

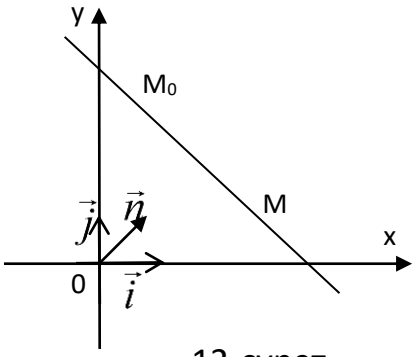
Шешуі. M_1 мен M_2 нүктелерінің координаталарын (4.1) теңдеуіне қойғаннан соң $\frac{x-3}{5-3}=\frac{y+2}{1+2}$ немесе $3x-2y-13=0$ теңдеуін аламыз.

2-мысал. $y=0{,}75x-3$ түзуі үшін оның кесінділік теңдеуін жазу керек. Осы түзумен және координаталар өстерімен шектелген үшбұрыштың ауданын есептеу керек.

Шешуі. Берілген теңдеуді былайша түрлендіреміз: $0{,}75x-y=3\Leftrightarrow\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ Нәтижесінде берілген түзудің кесінділік теңдеуі болатын $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ теңдеуін аламыз. Сонда берілген түзу мен және координата өстерімен шектелген OAB үшбұрышы шығады (11-сурет), оның катеттері 3 және 4-ке тең. Сондықтан үшбұрыш ауданы $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$ кв. өлшем.

Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу теңдеуі

Тік бұрышты координаталар жүйесінде $M_0(x_0, y_0)$ нүкте және $\bar{n} = (A, B)$ вектор берілсін. M_0 нүктеден $\bar{n}$ векторға перпендикуляр етіп l түзуін жүргізейік, $M(x, y)$ ол түзудің еркін нүктесі болсын (12-сурет). M нүкте $\overline{M_0M}$ векторы $\bar{n}$ векторға перпендикуляр болғанда, тек сонда ғана l түзуінің бойында жатады және бұл кезде олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады:



12-сурет

$$\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0. \qquad (5.1)$$

Векторлардың скаляр көбейтіндісі олардың сәйкес координаталарының қосындысына тең болатындықтан (5.1) координаталар арқылы былайша

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (5.2)$$

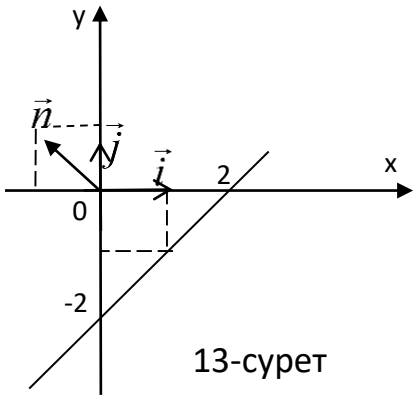
жазылады. Мұны берілген $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден берілген $\bar{n} = (A, B)$ векторға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу теңдеуі дейді. $\bar{n}$ вектор түзудің нормаль векторы делінеді.

1-мысал. $M_1(1,-1)$ нүкте арқылы $\bar{n} = (-1, 1)$ векторға перпендикуляр етіп жүргізілген түзу теңдеуін құру керек (13-сурет).

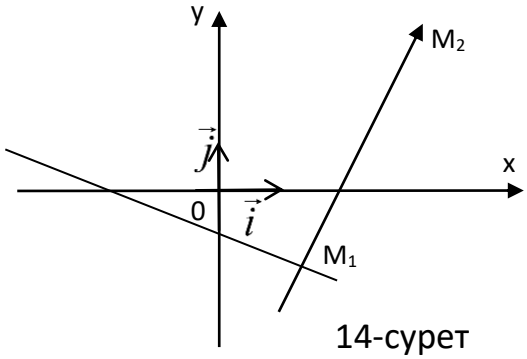
Шешуі. (5.2) формуланы пайдаланып, берілген түзудің теңдеуін табамыз $(-1)(x-1) + 1 \cdot (y-1) = 0$ немесе $x - y - 2 = 0$.

2-мысал. $M_1(2,-1)$ мен $M_2(4,5)$ нүктелері берілген. M_1 нүктесі арқылы $\overline{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр болатын түзу жүргізіп, оның теңдеуін құру керек.

Шешуі. Іздеген түзудің нормалы $\bar{n} = \overline{M_1M_2} = (4-2, 5-1) = (2, 4)$ векторы болады (14-сурет). Демек, (5.2) формула бойынша $2(x-2) + 6(y+1) = 0$ теңдеуін аламыз. Бұдан $x + 3y + 1 = 0$ болып шығады.



13-сурет



14-сурет

Шешуі. Іздеген түзудің нормалы $\bar{n} = \overline{M}_1\overline{M}_2 = (4-2, 5-1) = (2, 4)$ векторы болады (14-сурет). Демек, (5.2) формула бойынша $2(x-2)+6(y+1)=0$ теңдеуін аламыз. Бұдан $x+3y+1=0$ болып шығады.

Түзудің жалпы теңдеуі

Тік бұрышты координаталар жүйесіндегі теңдеуі бірінші дәрежелі теңдеулер болатын сызықтар ***бірінші ретті сызық*** деп аталады.

Алғашқы параграфтарда қорытылып шығарылған түзудің теңдеулері, олардың әртүрлі жазылуына қарамастан бәрі де бірінші дәрежелі екі белгісізді теңдеулер. Сондықтан түзудің теңдеуі тік бұрышты координаталар жүйесінде екі айнымалы сызықтық теңдеу болады-деген қорытынды жасауға болады. Ондай теңдеудің жалпы түрі мынадай болады:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (6.1)$$

Мұндағы A, B, C қатарынан нөлге тең емес кез-келген нақты сандар.

Теорема. Түзу бірінші ретті сызық болады. Керісінше бірінші ретті сызықтың қай-қайсысы да жазықтықта жатқан түзу болады.

Дәлелі. Теореманың бірінші бөлімі жоғарыдағы параграфтарда дәлелденді. Енді оның екінші бөлімін дәлелдейік. (6.1) теңдеудегі A мен B қатарынан нөлге тең болмауы керек, мысалы $A \neq 0$ болсын. Онда (6.1) теңдеуді былайша түрлендіруге болады: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Ал, мұндағы $-\frac{A}{B} = k, \quad -\frac{C}{B} = b$ десек, онда түзудің (2.1) түріндегі теңдеуі шығады. Егер $B = 0, \quad A \neq 0$ болса, онда (6.1) теңдеудің мына түрдегі $x = a$, мұндағы $a = -C/A$ теңдеу шығады, ол Ox өсіне перпендикуляр болатын түзудің теңдеуі еді. Сонымен әрбір бірінші дәрежелі екі айнымалы сызықтық теңдеу тік бұрышты координаталар жүйесінде түзуді анықтайды екен. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан кез-келген бір дәрежелі екі белгісізді теңдеу түзудің теңдеуі болатыны және керісінше кез-келген түзудің теңдеуі сызықтық теңдеу болатыны шығады. Сондықтан (6.1) теңдеу түзудің жалпы теңдеуі делінеді. Ол теңдеудің коэффициенттерін түрліше таңдап алу арқылы түзудің әртүрлі теңдеулерін шығарып алуға болады.

Тік бұрышты координаталар жүйесінде (6.1) жалпы теңдеумен түзу берілсін. Ол түзуге $\bar{n} = (A, B)$ вектор және оған коллинеар болатын кез-келген $\lambda\bar{n} = (\lambda A, \lambda B)$ түріндегі вектор нормаль векторы болады,ол туралы 5-те айтылады.Енді (6.1)түрдегі теңдеумен берілген түзудің бағыттаушы векторын анықтайық.

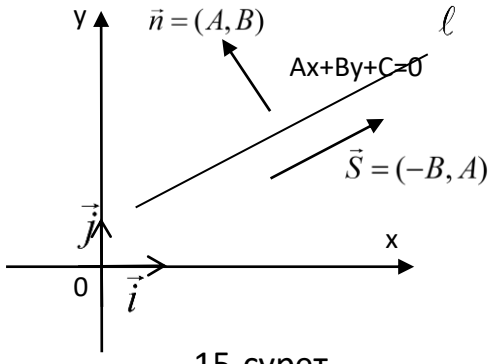
Теорема. Жалпы түрдегі теңдеумен (6.1) берілген l түзуі үшін нөлдік емес $\bar{S} = (m, n)$ векторы

$$Am + Bn = 0 \qquad (6.2)$$

болғанда, тек сонда ғана оған бағыттаушы вектор болады.

Дәлелі. Нормаль вектор $\bar{n} = (A, B)$ бұл l түзуіне перпендикуляр болатыны белгілі. Сондықтан, егер $\bar{S} = (m, n)$ түзудің бағыттаушы векторы болса, онда $\bar{n} \perp \bar{S}$ болуы керек, олай болса олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болады: $\bar{n} \cdot \bar{S} = 0$, яғни $Am + Bn = 0$ болады.

Енді керісінше $Am + Bn = 0$ болсын, онда координаталары (A, B) және (m, n) болатын векторлар перпендикуляр болады, яғни $\bar{n} \perp \bar{S}$. Демек, $\bar{S}$ векторы түзуге параллель болады, яғни (6.2) шарттын қанағаттандыратын $\bar{S} = (m, n)$ векторы (6.1) түрде берілген түзудің бағыттаушы векторы болады.



15-сурет

Салдар. (6.1) түрде берілген түзу үшін $\bar{S} = (-B, A)$ векторы бағыттаушы вектор болады. Шынында да $\bar{S} = (-B, A)$ векторы үшін (6.2) шарты орындалады: $A \cdot (-B) + B \cdot A = 0$ болады. Сондықтан $\bar{S} \perp \bar{n}$, ал $\bar{n}$ түзуге перпендикуляр болатындықтан $\bar{S}$ түзуге параллель болуы керек.

Мысал. $5x-3y+4=0,\quad y=0{,}4x+17,\quad x=2$ теңдеулерімен берілген түзулердің нормаль және бағыттаушы векторларын табыңдар.

Шешуі. Бірінші түзудің нормаль векторы $\bar{n}=(5,-3)$, бағыттаушы векторы $\bar{S}=(3,5)$ екінші түзу үшін $\bar{n}=(0{,}4;-1)$, $\bar{S}=(1;0{,}4)$, үшінші түзу үшін $\bar{n}=(1,0)$, $\bar{S}=(0,1)$ болады.

Егер түзудің жалпы теңдеуіндегі барлық A, B, C коэффициенттер нөлден өзгеше сандар болса, онда ол толық теңдеу делінеді, егерде ол коэффициенттердің ең болмағанда біреуі нөлге тең болса теңдеу толымсыз делінеді.

Толымсыз теңдеудің барлық мүмкін жағдайларын қарастырамыз:

1) $C=0$, сонда (6.1) теңдеу былай жазылады $Ax+By=0$ және ол бас нүктеден өтетін түзуді анықтайды, өйткені $O(0,0)$ нүктесінің координаталары ол теңдеуді қанағаттандырады.

2) $B=0$, сонда (6.1) теңдеу мына түрге келеді $Ax+C=0$ және Oy өсіне параллель түзуді анықтайды, өйткені $\bar{n}=(A,0)\perp Oy$.

3) $A=0$, сонда (6.1) теңдеу мына түрде жазылады $By+C=0$ және Ox өсіне параллель түзуді анықтайды, өйткені $\bar{n}=(0,B)\perp Ox$.

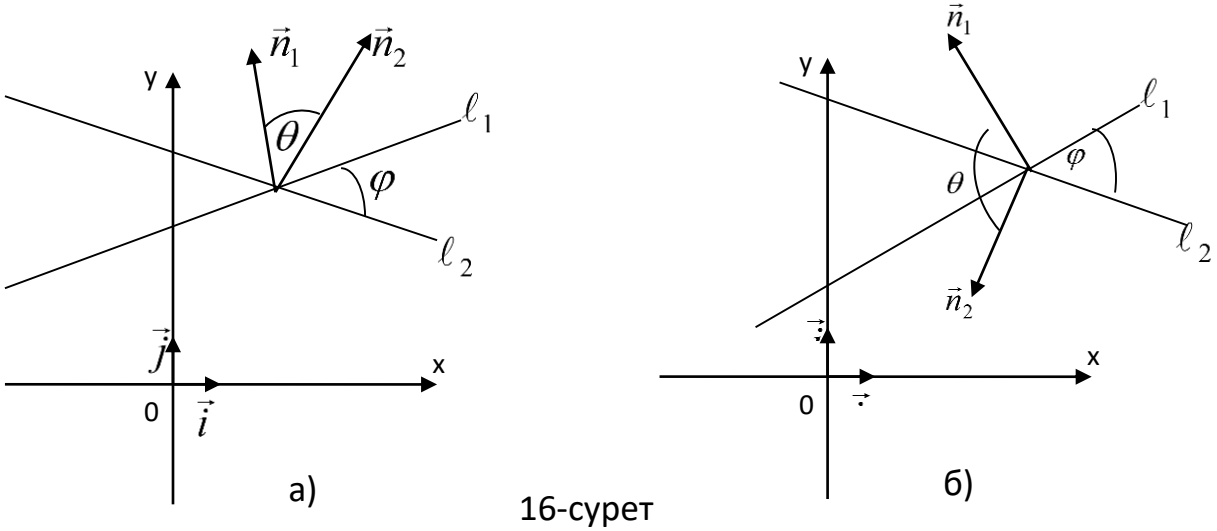
4) $B=0,\quad C=0$, сонда $A\neq 0$ болғандықтан, (6.1) теңдеу $x=0$ түрінде жазылады және Oy өсін анықтайды l түзуі Oy өсіне параллель және бас нүктеден өтеді.

5) $A=0,\quad C=0$, сонда $B\neq 0$ болғандықтан, (6.1) теңдеу $y=0$ түрінде жазылады да, Ox өсін анықтайды.

Түзулердің арасындағы бұрыш. екі түзудің параллель және перпендикуляр болу шарттары

Анықтама. Қиылысатын екі түзу арасындағы бұрыш деп олар анықтайтын бұрыштардың шама жағынан кішісін айтады. l_1 және l_2 түзулер арасындағы бұрышты былайша $(l_1^{\wedge}, l_2)=\varphi$ белгілейді, мұндағы $0\le\varphi\le 90^0$.

Түзулер әртүрлі теңдеулермен берілген жағдайларда, олар арасындағы бұрышты табу жолдарын қарастырайық.



а) 16-сурет б)

1) l_1 және l_2 түзулері жалпы теңдеулермен $A_1x+B_1y+C_1=0$ және $A_2x+B_2y+C_2=0$ берілсін.

Бұл түзулердің нормаль векторлары $\bar{n}_1=(A_1,B_1)$ мен $\bar{n}_2=(A_2,B_2)$ арасындағы бұрышты θ делік.

Егер $\theta=90^0$ (16, а-сурет) болса, онда $\varphi=\theta$. Егер $\theta>90^0$ (16, б-сурет) болса, онда $\varphi=180^0-\theta$ болады да, екі жағдайда да $\cos\varphi=|\cos\theta|$ теңдігі орындалады. Ал, екі вектор арасындағы бұрыш

$$\cos\theta=\cos\left(\bar{n}_1\,\hat{,}\,\bar{n}_2\right)=\frac{\bar{n}_1\bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}$$

болатын еді. Демек, l_1 мен l_2 түзулерінің арасындағы φ бұрышының косинусы

$$\cos\varphi=\frac{|\bar{n}_1\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} \qquad (7.1)$$

формуласымен табылады. Мұның оң жағын координаталар арқылы жазсақ:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (7.2)$$

Берілген түзулер перпендикуляр болса, олар арасындағы бұрыш $\varphi = 90^0$ болады, ал $\cos 90^0 = 0$. Сондықтан (7.2)-тен бұл кезде

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \qquad (7.3)$$

болып шығады. Бұл екі түзудің перпендикуляр болу шарты болып табылады.

Ескерту. Егер параллель векторлардың: $\bar{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\bar{n}_2 = (A_2, B_2)$ скаляр көбейтіндісі нөл болатынын ескерсек, онда (7.3) шартын тікелей алуға болады.

Түзулердің параллельдік белгісі векторлық формада $\bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2$ жазылатын еді, мұндағы $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ берілген түзулерге перпендикуляр векторлар. Соңғы теңдіктен координаталық түрге көшсек

$$A_1 = \lambda B_1, A_2 = \lambda B_2$$

болар еді. Ал, бұл

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad \text{немесе} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (7.4)$$

деген сөз.

1-мысал. Мына түзулер $x - 2y + 1 = 0, \quad 2x + y - 3 = 0$ арасындағы φ бұрышын табыңыздар.

Шешуі. (7.2) формула бойынша

$$\cos\varphi = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0.$$

Сондықтан, $\varphi = 90^0$ болады, түзулер перпендикуляр екен.

2-мысал. Төмендегі түзулер парының ішіндегі өзара параллель немесе перпендикуляр болатындарын көрсетіңіздер: $6x - 15y + 7 = 0$ және $10x + 4y - 1 = 0$; $5x - 7y - 4 = 0$ және $3x + 2y - 13 = 0$,

$x - 2y + 1 = 0$ және $2x - 4y - 1 = 0$.

Шешуі. I-пар түзулер үшін түзулердің перпендикуляр болу шарты (7.3) орындалады $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 6 \cdot 10 - 15 \cdot 4 = 0.$ Сондықтан олар өзара перпендикуляр болатын түзулер. 2-пар түзулер үшін

$A_1A_2 + B_1B_2 = 5\cdot 3 - 7\cdot 2 = 1 \neq 0.$ және 5:3 ≠ -7:2. Сондықтан ол түзулер перпендикуляр да, параллель де емес. 3-пар түзулер үшін $1\cdot 2 - 2\cdot(-4) = 10 \neq 0$ және $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4}$. Сондықтан бұл түзулер өзара параллель.

2) l_1 және l_2 түзулері бұрыштық коэффициенттері арқылы берілсін:

$$y = k_1 x + b_1 \text{ және } y = k_2 x + b_2 .$$

Бұл түзулердің нормаль векторлары үшін $\bar{n}_1 = (k_1, -1)$, $\bar{n}_2 = (k_2, -1)$ векторларын алуға болады. Бұл жағдайда (7.2) формула мына түрде болады:

$$\cos\varphi = \frac{\left|1 + k_1 k_2\right|}{\sqrt{k_1^2 + 1}\sqrt{k_2^2 + 1}}. \qquad (7.5)$$

Осы (7.5) формуламен бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген екі түзу арасындағы бұрыш табылады. Егер $k_1 = k_2$ болса, онда $\cos\varphi = 1$ және $\varphi = 0$, яғни түзулер параллель болады. Егер $1 + k_1 k_2 = 0$ болса, онда $\cos\varphi = 0$ және $\varphi = \frac{\pi}{2}$, яғни түзулер перпендикуляр болады.

Сонымен бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген екі түзудің параллелдігі мен перпендикулярлығының қажетті де жеткілікті шарттары былай айтылады:

$y_1 = k_1 x + b_1$ мен $y_2 = k_2 x + b_2$ түзулері:

а) параллель болуы үшін $k_1 = k_2$ болуы қажетті және жеткілікті;

б) перпендикуляр болуы үшін $k_1 \cdot k_2 = -1$ болуы қажетті және жеткілікті.

Бұрыштық коэффициенттері арқылы берілген түзулер арасындағы бұрышты табудың басқа формуласын қорытып шығарайық. $0 \le \varphi \le 90^0$ болған кезде $\sin\varphi \ge 0$ және $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$ болғандықтан соңғыға (7.5) –дегі мәнін қойсақ

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{(k_1 k_2 - 1)^2}{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)}} = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{k_1^2 + 1}\sqrt{k_2^2 + 1}}.$$

болар еді. Бұл және (7.5) формула бойынша екі түзу арасындағы бұрыштың тангенсін табуға болады:

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|. \qquad (7.6)$$

Егер (7.6) формуласының бөлімі нөлге айналса, яғни $k_1 k_2 + 1 = 0$ болса, онда жоғарыда айтылғандай түзулер перпендикуляр және $\varphi = 90^0$.

1-мысал. $y = -\frac{x}{7} + 2$ мен $y = 3x - 1$ түзулерінің арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. (7.6) формуласы бойынша $k_1 = -\frac{1}{7}, k_2 = \frac{3}{4}$ деп алып,

$$tg\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{7} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4} + 1}\right| = 1$$

екенін табамыз. Түзулер арасындағы бұрыш 45^0.

2-мысал. $y = -\frac{x}{3} - 3$ және $y = 3x - 1$ түзулерінің перпендикуляр екенін дәлелдеу керек.

Шешуі. Түзулердің перпендикулярлық шартының орындалуын тексереміз: $k_1 \cdot k_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3 = -1$. Демек, түзулер өзара перпендикуляр.

3) l_1 және l_2 түзулері канондық теңдеулермен берілсін:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \text{ және } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} \qquad (7.7)$$

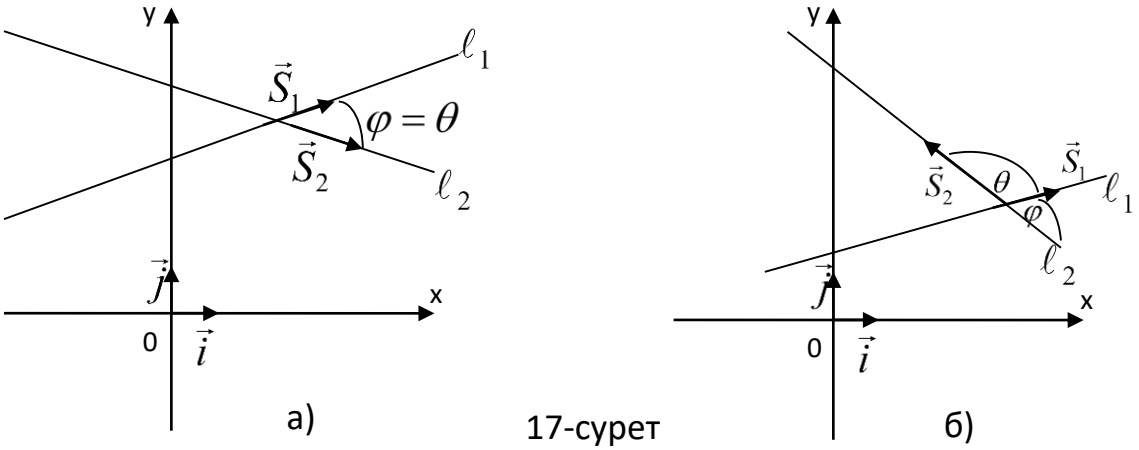
Берілген түзулердің бағыттаушы векторлары $\bar{S}_1 = (m_1, n_1)$, $\bar{S}_2 = (m_2, n_2)$ болады. Берілген түзулер арасындағы бұрыш φ, ал олардың бағыттаушы векторлары арасындағы бұрыш θ делік. Егер $\theta \le 90^0$ болса (17, а-сурет), онда $\varphi = \theta$, ал $\theta > 90^0$ болса (17, б-сурет), онда $\varphi = 180^0 - \theta$ екенін жеңіл байқауға болады. Сондықтан $\cos\varphi = |\cos\theta|$ теңдігі орындалады, I-тарау 13-тағы (13.1) формула

бойынша

$$\cos\theta = \cos\left(\hat{\bar{a}, \bar{b}}\right) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

болады. Демек,

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{S}_1 \bar{S}_2|}{|\bar{S}_1||\bar{S}_2|} \quad \text{немесе} \quad \cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (7.8)$$



а) 17-сурет б)

Бұдан l_1, l_2 түзулер параллель болса:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad (7.9)$$

перпендикуляр болса:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (7.10)$$

болып шығады.

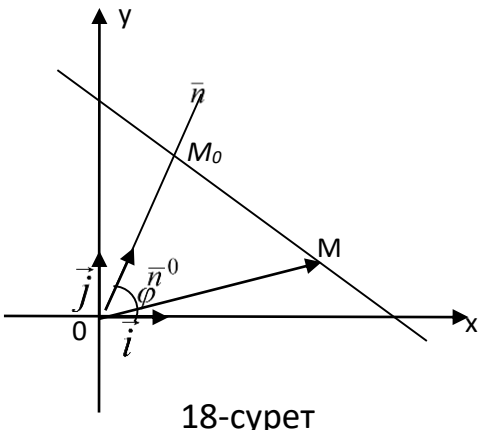
3-мысал. Төмендегі түзулер жұбының ішінде параллель немесе перпендикуляр болатындарын көрсетіңіздер:

$$1)\ \frac{x-7}{3}=\frac{y}{6},\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}; \qquad 2)\ \frac{x-5}{3}=\frac{y}{6},\ \frac{x+2}{-2}=\frac{y-6}{2}.$$

Шешуі. Бірінші түзулер жұбы үшін $\frac{3}{1}=\frac{6}{2}$ болғандықтан (7.2) шарты орындалады. Демек, ол түзулер жұбы параллель болады. Екінші түзулер жұбы үшін $-\frac{3}{2}\neq\frac{6}{1}$. Демек, бұл түзулер үшін параллельдік шарт орындалмайды, олар параллель емес. Ал, түзулердің перпендикуляр болу шарты (7.10) $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 3\cdot(-2)+6\cdot 1=0$ орындалады. Демек, екінші түзулер жұбы өзара перпендикуляр болады.

Түзудің нормаль теңдеуі

Тік бұрышты координаталар жүйесінде координаталар басынан ***P*** қашықтықта өтетін және нормаль векторы абсцисса өсімен φ бұрыш жасайтын l түзуін қарастырайық (18-сурет). О нүктеден l түзуіне перпендикуляр етіп n түзуін жүргізейік. Оның бойына бірлік вектор $\bar{n}^0$-ді О нүктеден бастап өлшеп салайық. Сонда бұл вектордың координаталары өзінің координата өстеріндегі проекцияларына тең болатындықтан



18-сурет

$$\bar{n}^0 = (\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad (8.1)$$

болар еді. Мұндағы φ-түзудің нормаль векторы $\bar{n}^0$ мен x өсінің арасындағы бұрыш. Ал, $OM_0 = P$ болады. Осы параметр *P* мен φ-ді пайдаланып l түзуінің теңдеуін құрайық. Ол үшін l түзуі бойынан $M(x,y)$ нүктесін алайық. Бұл нүкте l түзуінде жатса және сол жағдайда ғана $O\overline{M}$ вектордың n түзуіндегі проекциясы *P*-ға тең болады:

$$np\, O\overline{M} = P \qquad (8.2)$$

$\bar{n}^0$ бірлік вектор болғандықтан векторлардың скаляр көбейтіндісінің 2-анықтамасы бойынша (I-тарау, §13)

$$np\,\overline{OM} = \bar{n}^0 \cdot \overline{OM} \qquad (8.3)$$

болады. Мұндағы $\overline{OM} = (x, y)$ болғандықтан (8.3), (8.2), (8.1) формулалардан векторлардың скаляр көбейтіндісінің координаталар арқылы жазылуын ескерсек

$$P = \bar{n}^0 \cdot \overline{OM} = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

немесе

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - P = 0 \qquad (8.4)$$

бұл түзудің нормаль теңдеуі делінеді.

Енді түзудің жалпы теңдеуінен оның нормаль теңдеуіне көшу мүмкіндігін қарастырайық. l түзуінің нормаль теңдеуі (8.4), ал жалпы теңдеуі

$$Ax + By + C = 0 \qquad (8.5)$$

болсын. Бұл екі теңдеу бір ғана түзуді анықтайтындықтан теңдеудің сәйкес коэффициенттері пропорционал болуы керек. Сондықтан (8.5)-ті нөлге тең емес μ санына көбейтсек

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$$

болар еді де $\mu A = \cos\varphi,\ \ \mu B = \sin\varphi,\ \ \mu C = -P$ болып шығады. Сонда $(\mu A)^2 + (\mu B)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ бұдан

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (8.6)$$

Түзудің жалпы теңдеуін оның нормаль теңдеуіне көшіретін пропорционалдық коэффициенті μ**-ды нормальдаушы көбейткіш** деп атайды, оның таңбасы жалпы теңдеудегі бос мүшенің таңбасына кері болады. Егер $C = 0$ болса, онда оның таңбасы еркін алынады.

Сонымен түзудің жалпы теңдеуін нормаль түрге келтіру үшін, нормальдаушы көбейткішті тауып, оның әр мүшесін соған көбейту керек. Мысалы

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (8.7)$$

түзудің нормаль теңдеуі болады.

1-мысал. Түзудің жалпы теңдеуін $3x+4y-10=0$ нормаль түрге келтіру керек.

Шешуі. Нормальдаушы көбейткіш $\mu=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$ болады. Осыған түзу теңдеуін көбейтсек $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$ теңдеуі шығады. Бұл есепте $\cos\varphi=3/5,\quad \sin\varphi=4/5,\ P=2.$

Ескерту. Бір аргумент үшін $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ болатындықтан, нормаль түрде берілген түзу теңдеуіндегі айнымалылар x пен y-тың коэффициенттерінің квадраттарының қосындысы бірге тең болады. Жоғарыда келтірілген мысалда $3^2+4^2=25\neq 0,$ ал $(3/5)^2+(4/5)^2=1$ болатындықтан, түзудің соңғы теңдеуі нормаль теңдеу болады.

Бақылау сұрақтары:

1. Берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі қалай құрылады?
2. Берілген нүкте арқылы берілген векторға перпендикуляр жүргізілген түзудің теңдеуі қалай жазылады?
3. Түзудің жалпы және нормаль теңдеулері қандай түрде беріледі және олардың арасындағы байланыс қандай?
4. Екі түзудің арасындағы бұрыш қалай анықталады және қандай формуламен есептеледі?
5. Екі түзудің параллель және перпендикуляр болу шарттары қандай?