11-дәріс. Кеңістіктегі сызық теңдеуі.
12-дәріс. Түзудің бағыттаушы және нормаль векторлары мен бұрыштық коэффициенті. Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі. Түзудің параметрлі және канондық теңдеулері

Дәріс жоспары:

1. Кеңістіктегі сызық ұғымы және оның теңдеулері.
2. Түзудің бағыттаушы және нормаль векторлары, олардың геометриялық мағынасы.
3. Түзудің бұрыштық коэффициенті және бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі.
4. Түзудің параметрлік және канондық теңдеулері, олардың арасындағы байланыс.

Кеңістіктегі сызық теңдеуі

Кеңістікте кез-келген сызық екі беттің қиылысуынан пайда болған фигура ретінде қарастырылады.

$$F_1(x, y, z) = 0 \quad \text{және} \quad F_2(x, y, z) = 0 \tag{4.1}$$

Өзара қиылысатын екі беттің теңдеулері болсын. Бұл беттердің қиылысу сызығында жататын кез-келген нүктенің координаталары (4.1)-теңдеудің екеуін де қанағаттандырады, өйткені ол нүктелер екі жазықтықта да жатады. Керісінше, координаталары (4.1) теңдеудің екеуін де қанағаттандыратын нүкте олардың қиылысу сызығында жатады. Сондықтан мына теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

кеңістіктегі сызықтың теңдеуі болады.

Берілген L сызығы қиылысу сызығы болатын беттерді түрліше таңдай алуға болады. Мысалы Oz осін $x = 0,\ y = 0$ жазықтарының қиылысу сызығы ретінде де, $x + y = 0,\ x - y = 0$ жазықтықтарының қиылысу сызығы ретінде де анықтауға болады. Мына теңдеу

$$\lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z) = 0 \tag{4.3}$$

мұндағы $\lambda_1,\ \lambda_2$ қатарынан нөлге тең емес нақты сандар, (4.2) сызықтан өтетін кез-келген беттің теңдеуі болады. Өйткені (4.2) теңдеулер жүйесін

координаталары қанағаттандыратын кез-келген нүктенің координатасы (4.3) теңдеуін де қанағаттандырады.

Кеңістіктегі нүкте

Үш бет $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$, $F_3(x,y,z)=0$ теңдеулермен берілсін. Егер ол үш беттің ортақ нүктесі болса, ол нүктенің координаталары бұл үш теңдеудің үшеуін де қанағаттандырады. Керісінше, бір нүкте координаты берілген үш теңдеуді де қанағаттандырса, онда ол нүкте ол теңдеулермен анықталатын үш бетте жатады, яғни ол үш беттің қиылысу нүктесі болады. Сондықтан үш беттің қиылысу нүктесін табу үшін ол үш беттің теңдеуін бір жүйеге алып, шешу керек:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \\ F_3(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Бұл теңдеулер жүйесінің әрбір нақты шешімі олардың қиылысу нүктелерін береді. Егер теңдеулер жүйесі үйлесімсіз болса, нақты түбірі болмаса, онда үш беттің ортақ нүктесі болмайды.

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ТҮЗУ СЫЗЫҚ

Түзудің бағыттаушы және нормаль векторлары мен бұрыштық коэффициенті

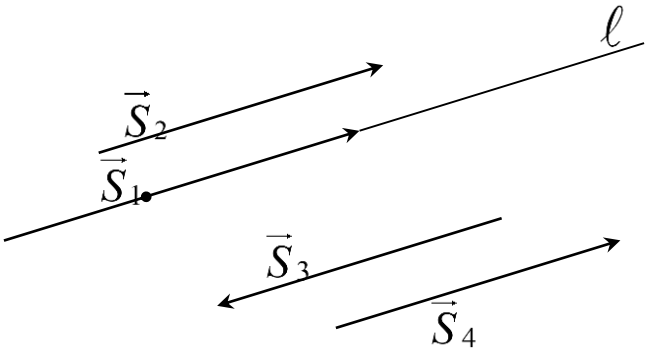
АНЫҚТАМА. Түзудің **бағыттаушы векторы** деп оған параллель болатын нөлдік емес кез-келген векторды айтады.

Бұл анықтамадан кез-келген түзудің сансыз көп бағыттаушы векторы болатыны шығады. Олардың бәрі өзара коллинеар векторлар болады (1-сурет).

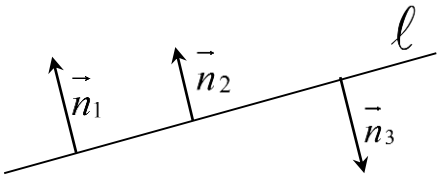
АНЫҚТАМА. Түзудің **нормаль векторы** деп оған перпендикуляр болатын кез-келген нөлдік емес векторды айтады.

Анықтама бойынша түзудің сансыз көп нормаль векторы болады, олардың бәрі өзара коллинеар болады (2-сурет). Жазықтыққа тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі ендірілсін. Ол жазықтықта жатқан M_0 нүкте арқылы өтетін ℓ түзуін қарастырайық (3-сурет), вектор $\vec{S}$ оның бағыттаушы векторы болсын. ℓ түзуі абсцисса осін *N* нүктеде қиып өтсін. Бұл жағдайда ℓ түзуі мен *Ox* осі арасындағы бұрыш ретінде *Ox* осін *N* нүктесінен сағат тілі қозғалысына кері бағытта бұрып, ℓ-мен беттестіруге қажетті болатын бұрышты алады (ол бұрыштың шамасы 180^0-тан аспайды). Бұл бұрыш түзудің *Ox* осіне көлбеулік бұрышы деп аталады. Егер ℓ түзуі *Ox*

осіне параллель болса, онда оның көлбеулік бұрышы 0^0-ге тең деп алынады (4-сурет).

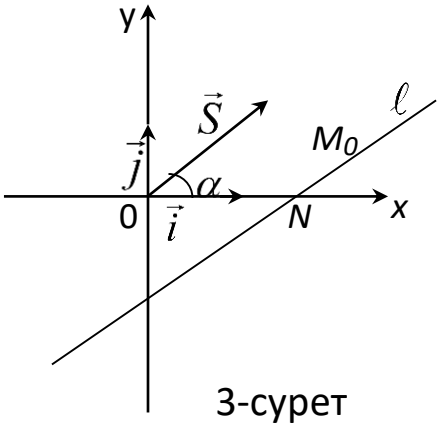


1-сурет

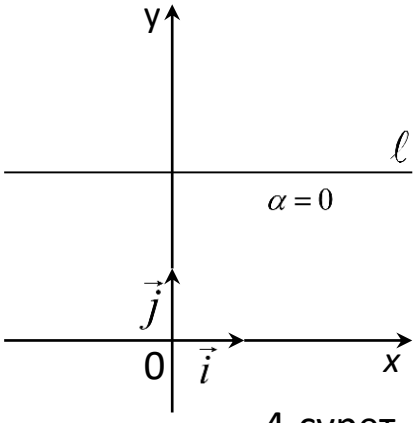


2-сурет

Жазықтыққа тікбұрышты декарттық координаталар жүйесі ендірілсін. Ол жазықтықта жатқан M_0 нүкте арқылы өтетін ℓ түзуін қарастырайық (3-сурет), вектор $\vec{S}$ оның бағыттаушы векторы болсын. ℓ түзуі абсцисса осін *N* нүктеде қиып өтсін. Бұл жағдайда ℓ түзуі мен *Ox* осі арасындағы бұрыш ретінде *Ox* осін *N* нүктесінен сағат тілі қозғалысына кері бағытта бұрып, ℓ-мен беттестіруге қажетті болатын бұрышты алады (ол бұрыштың шамасы 180^0-тан аспайды). Бұл бұрыш түзудің *Ox* осіне көлбеулік бұрышы деп аталады. Егер ℓ түзуі *Ox* осіне параллель болса, онда оның көлбеулік бұрышы 0^0-ге тең деп алынады (4-сурет).



3-сурет



4-сурет

Түзудің көлбеулік бұрышының тангенсі түзудің бұрыштық коэффициенті делінеді, оны әдетте *k* арқылы белгілейді:

$$k = tg\alpha . \qquad (1.1)$$

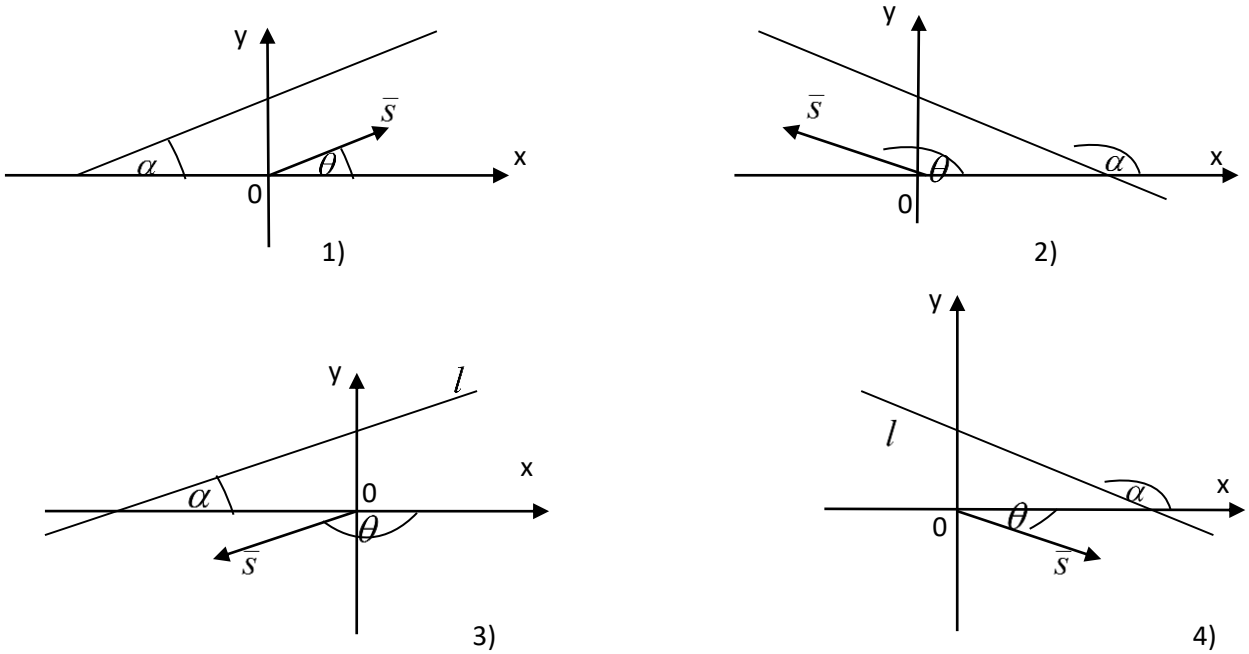
Егер $\alpha = 0^0$ болса $k = 0$ болады, яғни абсцисса осіне параллель түзудің бұрыштық коэффициенті нөлге тең болады. Егер $\alpha = 90^0$ болса, онда $k = tg\alpha$

мағынасыз болады. Сөйтіп абсцисса осіне перпендикуляр, ордината осіне параллель түзулердің бұрыштық коэффициенті болмайды.

Енді мына ұйғарымның дұрыстығын дәлелдейік: егер түзу *Oy* осіне параллель болмаса және оның бағыттаушы векторы $\vec{S} = (m, n)$ болса, онда ол түзудің бұрыштық коэффициенті

$$k = \frac{n}{m} \qquad (1.2)$$

болады. Түзудің *Ox* осіне көлбеу бұрышы α, ал бағыттаушы вектор $\vec{S}$-тің көлбеу бұрышы θ болсын. Түзу *Ox* осімен сүйір де, доғал да бұрыш жасауы мүмкін болғандықтан, оның бағыттаушы векторы бір-біріне қарама-қарсы екі бағытта болуы мүмкін. Сондықтан 5-суретте көрсетілгендей төрт жағдай болуы мүмкін. 1 және 3 жағдайда $\theta = \alpha$ болады да, $\bar{S}$ вектордың осьтегі проекциясы $m = |\bar{s}|\cos\theta, n = |\bar{s}|\sin\theta$ болады. 2 және 3 жағдайларда $\theta = \pi - \alpha$ болады да, $\bar{S}$ вектордың өстегі проекциялары $m = |\bar{s}|\cos\theta, n = -|\bar{s}|\sin\theta$ болады.



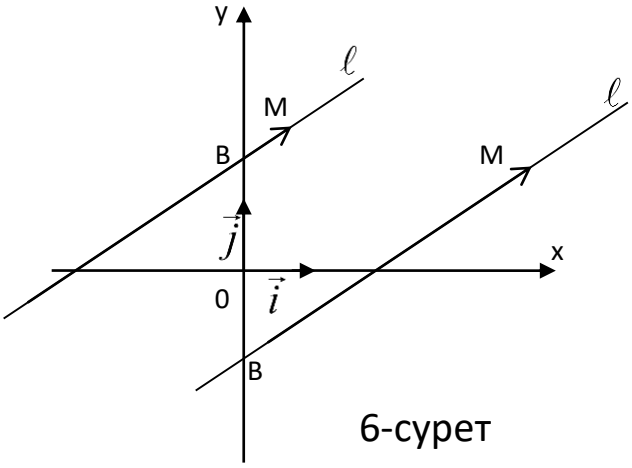
5-сурет

Сонымен, 1 және 3 жағдайда $tg\theta = tg\alpha, \frac{n}{m} = tg\theta$ болып шығады, ал 2 және 4 жағдайда $tg\theta = -tg\alpha, \frac{n}{m} = -tg\theta$. Сөйтіп, шынында да $\frac{n}{m} = tg\alpha$ болады екен.Дәлелденген ұйғарымнан түзудің бұрыштық коэффициенті оның бағыттаушы векторының екінші координатасының бірінші координатасына қатынасына тең болатыны және *Ox* осіне көлбеу бұрышы сүйір болатын түзулердің бұрыштық коэффициенті оң, ал доғал бұрыш жасайтын түзулер үшін теріс болатыны шығады, яғни

$$\bar{s} = (m,n) \Leftrightarrow k = \frac{n}{m}, \quad \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k > 0, \quad k > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k < 0.$$

Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі

l түзуі 0у өсіне параллель болмасын, ол өсті $B(o,b)$ нүктеде қиып өтсін, бұрыштық коэффициенті k болсын. Осы түзудің теңдеуін құрайық (6-сурет).



6-сурет

Ол үшін түзу бойымен кез-келген бір B-дан басқа нүкте аламыз, ол $M(x,y)$ болсын. Сонда l түзуінің бағыттаушы векторы

$\bar{S} = B\bar{M} = (x-0, y-b) = (x, y-b)$ болар еді. Олай болса $k = \frac{y-b}{x}$

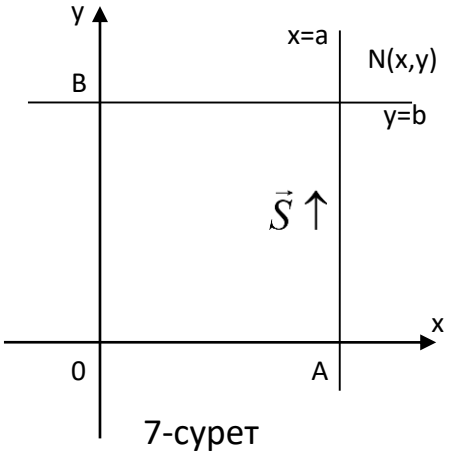
болады.Бұдан

$$y = kx + b \qquad (2.1)$$

теңдеуі шығады. Бұл теңдеуді тек түзу бойында жатқан нүкте координаталары қанағаттандырады. Сондықтан ол түзу теңдеуі болады. Оны түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі дейді. Егер түзу *Ox* өсіне параллель болса, онда оның бұрыштық коэффициенті $k = 0$ болатындықтан, оның теңдеуі мына түрде болады (7-сурет):

$$y = b. \qquad (2.2)$$

Егер l түзуі Оу өсіне параллель болса (7-сурет), онда оның бағыттаушы векторы $\bar{S}=(o,n)$ түріндегі вектор болады.



7-сурет

Айталық l түзуі *Ox* өсін $A(a,o)$ нүктеде қиып өтсін, ол түзудің A мен беттесетін ағымдық нүктесі $N(x,y)$ болсын, онда $A\bar{N}=(x-a,y)$ болар еді. Олай болса $x-a=0$ болады. Бұдан

$$x=a \qquad (2.3)$$

Оу өсіне параллель түзудің теңдеуі болады.

Мысалы, x өсінен 5-ке тең қашықтықта оған параллель етіп жүргізілген түзу теңдеуі не $y=5$ не $y=-5$ болады, ал $x=3$ теңдеуі OY өсіне параллель болатын және оның оң жағында 3-ке тең қашықтықтан өтетін түзудің теңдеуі болады.

1-мысал. Ордината өсінен екіге тең кесінді қиятын және абсцисса өсімен 45^0 бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазайық.

Шешуі. Есептің шарты бойынша $b=2, \alpha=45^0, tg45^0=1.$ Түзудің теңдеуі $y=x+2$ болады.

2-**мысал.** Ордината өсінің бойынан шамасы минус төртке тең кесіндіні қиятын және абсцисса өсімен 135^0 бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазайық.

Шешуі. Мұнда $b=-4, k=tg135^0=tg\left(180^0-45^0\right)=tg45^0=1.$

Сонда түзудің бұрыштық коэффициенттік теңдеуі $y=-x-4$ болады.

3-мысал. Координаталардың бас нүктесінен өтіп, абсцисса өсімен 30^0 бұрыш жасайтын түзудің теңдеуін жазайық.

Шешуі. Бұрыштық коэффициент $k=tg30^0=\sqrt{3}/3$, бос мүше $b=0$. Сонда бас нүктеден өтетін түзудің теңдеуі $y=\left(\sqrt{3}/3\right)\cdot x$ болады.

4-мысал. Координата бұрыштарының биссектрисаларының теңдеуін жазайық.

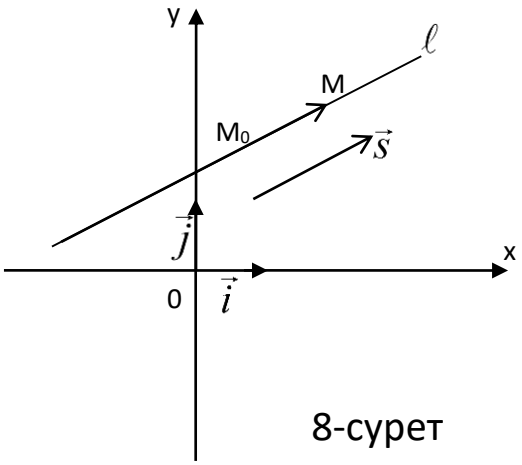
Шешуі. I және III координата жазықтықтарының биссектрисасы $O(0,0)$ нүктеден өтеді және *Ox* өсімен $\alpha=45^0$ бұрыш жасайды.

Сондықтан $b=0, k=tg45^0=1.$ Сонда іздеген биссектриса теңдеуі $y=x$ болады. Ал, II, IV координата бұрыштарының биссектрисасы

Ox өсімен $\alpha=135^0$ бұрыш жасайды. Сондықтан бұл кезде $b=0, k=tg135^0=-tg45^0=-1$ болатындықтан биссектриса теңдеуі $y=-x$ болады.

Түзудің параметрлі және канондық теңдеулері

Жазықтықта тікбұрышты координата жүйесі ендірілсін, ол жүйеде $M_0(x_0, y_0)$ нүкте мен $\bar{S}=(m,n)$ вектор берілсін. l түзуі M_0 нүктеден $\bar{S}$ векторға параллель етіп жүргізілген түзу болсын. Ол түзудің ағымдық нүктесі $M(x,y)$ десек, онда $M_0\overline{M}$ және $\bar{S}$ векторы коллинеар болар еді (8-сурет). Сондықтан t саны табылып,



8-сурет

$$M_0\overline{M}=t\bar{S} \qquad (3.1)$$

қатыс орындалуы керек. Бұл теңдікті координаталар арқылы былайша жазуға болады.

$$(x-x_0)\bar{i}+(y-y_0)\bar{j}=t(m\bar{i}+n\bar{j}).$$

Бұдан $x-x_0=tm, y-y_0=tn$ немесе

$$\begin{cases} x=x_0+tm, \\ y=y_0+tn \end{cases} \qquad (3.2)$$

теңдеулер шығады. Бұл теңдеуді тек l түзуі бойында жатқан нүктелердің координаталары қанағаттандырады. Керісінше нүкте координатасы (3.2) теңдеуді қанағаттандырса, онда ол нүкте сол түзуде жатады. Сондықтан (3.2) түзудің параметрлік теңдеуі, t-ны параметр дейді. (3.2) теңдеуді түрлендіріп, былайша жазуға болады

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (3.3)$$

бұны l түзуінің **канондық теңдеуі** деп атайды. Бұл теңдеудегі m мен n бағыттаушы вектордың координаталары болғандықтан қатарынан нөлге тең болмайды.

Егер $m=0, n\neq 0$ болса, онда (3.2) теңдеуі $x=x_0,\ y=y_0+tn$ түрінде болады. Бұл теңдеулер арқылы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінен өтетін Оу өсіне параллель түзу беріледі. Бұл түзудің канондық теңдеуі $x=x_0$ түрінде болады.

Егер $m\neq 0, n=0$ болса, онда (3.2) теңдеуі $x=x_0+tm,\ y=y_0$ түрінде болады. Бұл теңдеулер арқылы $M_0(x_0,y_0)$ нүктесінен өтетін, *Ox* өсіне параллель түзу беріледі. Мұндай түзудің канондық

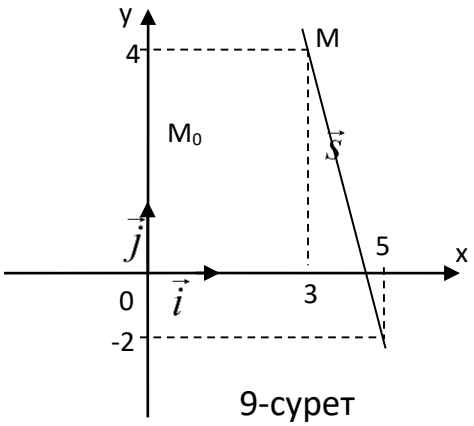
теңдеуі $y=y_0$ түрінде болады.

1-мысал. $M_0(3,-5)$ нүктесі арқылы $\bar{S}=(4,1)$ векторына параллель өтетін түзудің параметрлік теңдеуін құру керек.

Шешуі. M_0 нүктесінің координаталары мен $\bar{S}$ векторының координаталарын (3.2) теңдеуіне қою арқылы $x=3+4t,\ y=-5+t$ екенін аламыз.

2-мысал. l түзуі $x=5-2t,\ y=-2+6t$ теңдеулерімен берілген. Осы түзуді салу керек.

Шешуі. Түзуді салу үшін оның екі нүктесін табамыз. Олардың координаталарын анықтау үшін t параметрінің қандай да болсын екі мәнін аламыз және оларды түзудің теңдеуіне қоямыз. $t=0$ болғанда $M_0(5,-2)$ нүктесін, ал $t=1$ болғанда $M_1(3,4)$ нүктесін аламыз. Бұдан әрі M_0 мен M_1 нүктелерін саламыз да іздеген түзуді жүргіземіз (9-сурет).



9-сурет

Бақылау сұрақтары:

1. Кеңістіктегі сызық дегеніміз не және оның теңдеуі қалай беріледі?
2. Түзудің бағыттаушы және нормаль векторлары дегеніміз не? Олардың геометриялық мағынасы қандай?
3. Түзудің бұрыштық коэффициенті дегеніміз не және ол қалай анықталады?
4. Түзудің бұрыштық коэффициентпен берілген теңдеуі қалай жазылады?
5. Түзудің параметрлік және канондық теңдеулері қалай құрылады және олардың арасындағы байланыс қандай?